1. (1) 设 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，问 $R(B)$ 的取值范围.

(2) 证明：当 $A_{n\times n}$ 可逆时，$R\begin{pmatrix} A_{n\times n} & O_{n\times l} \\ C_{m\times n} & B_{m\times l} \end{pmatrix} = R(B)+n$.

(3) 证明：$R(AB) \geq R(A)+R(B)-n$.

(1) $\boxed{\text{课本例题} \quad AB=O \Rightarrow R(A)+R(B)\leq n}$

记 $B=(b_1, b_2, \cdots, b_l)$ 于是 $Ab_i=0$

n个未知数

$\therefore$ b_i 在 $Ax=0$ 的解空间内，而解空间的维数为 $n-R(A)$

但是，若 l 的个数小于 $n-R(A)$

i.e. $B=(b_1)$，但 $Ax=0$ 解空间维数为3. 此时 $R(B)\leq 1$.

$\therefore$ $R(B)$ 的取值范围为 $\{0, 1, \cdots, \min\{l, n-R(A)\}\}$.

(2) A 是方阵，仅对前 n 进行变换：

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & * \\ & \ddots \\ & & 1 \end{matrix} & O \\ C' & B \end{pmatrix}$$

$$R\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = n+R(B)$$

(3) $$R\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} O & AB \\ E & B \end{pmatrix} = n+R(AB)$$

同时：$R\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} = R(A)+R(E\ \ B) \geq R(A)+R(B)$

$\therefore$ $n+R(AB) \geq R(A)+R(B)$.

2. 记 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

基本的计算

(1) 若 $b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，求 $Ax=b$ 的解.

(2) 若 $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，求 $Ax=b$ 的解.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & & & (1) & (2) \end{array} \\ & \left[\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\therefore$ $Ax=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的通解为: $k_1\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$Ax=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 的特解为: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3、当 a 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ a x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + (a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

无解 / 唯一解 / 无穷组解，并求出其通解。

Way 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & a & -3 & 3 \\ 1 & 3 & a+1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+3) & a+3 \end{array}\right]$$

① $a=1$ 时无解。

② $a=-3$ 时无穷组解，通解为 $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

③ 其余时候唯一解，为 $\left[\frac{a+10}{a-1}, \frac{3}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right]^T$.

Way 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & a & -3 \\ 1 & 3 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+3)$$

$\therefore$ $a \neq -3$ or 1 时唯一解

仅需考虑 $a=1$ 与 $a=-3$ 时的情况即可。

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 7x_4 = b \end{cases}$

在 a, b 取何值时有解、无解，并求出其通解.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & a & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 10 & 7 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$

① $b \neq 4$ 时无解.

② $b = 4$ 时有解.

(i) $a = 1$ 时，解为 $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -7/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) $a \neq 1$ 时，解为 $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -7/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\7\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-5\\a\\10\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\2\\4\\7\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\b\end{pmatrix}$

讨论 a, b 为何值时有

与4完全一样，但表述不同

(1) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 表出。

(2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 表出，并求出表达式。

(1) 对应于第4题无解的情况

(2) 对应于第4题有解的情况

有唯一解 / 有无穷组解.

6. $\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_1 = 0 \end{cases}$

问a取何值时,该方程组有非零解,并求出通解.

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & -a & \cdots & -a \\ 2 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = a^{n-1} \begin{vmatrix} 1+a & -1 & \cdots & -1 \\ 2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ n & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^{n-1} \begin{vmatrix} 1+a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ n & 0 & \cdots & & 0 \end{vmatrix} = a^{n-1} \cdot (1+a) + a^{n-1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdots & -1 \\ 3 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ n & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^n + a^{n-1} + a^{n-1} \begin{vmatrix} 2+3+\cdots+n & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ n & & & 1 \end{vmatrix} = a^{n-1} \cdot \left(a + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

① $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时, 此时 i.e. $\begin{bmatrix} 1-\frac{n(n+1)}{2} & -1 & \cdots & -1 \\ 2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ n & & & 1 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ n & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$ 秩为$n-1$.

② $a=0$时, 此时 i.e. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & 0 & \end{bmatrix}$, 秩为1.

7. 非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有解的充分条件：(A)

A. $R(A)=m$.

B. A 的行向量组线性相关.

C. $R(A)=n$

D. A 的列向量组线性相关.

考虑 $A_{m\times n}$ 为很简单的矩阵便能很容易构造出其余选项的反例.

B. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$ 无解.

C. $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right]$ 无解.

D. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ 无解.

对于A，由于行数已经满了，再添加列数 (b) 不会再增加行秩.

换言之： $R(A)=R(A|b)$ if A 行满秩.

8. 下列命题中正确的是： (D)

A. $Ax=b$ 有唯一解，则 $|A|=0$.

B. 若 $Ax=0$ 只有零解，那么 $Ax=b$ 有唯一解.

C. 若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷组解.

D. 若 $Ax=b$ 有两个不同的解，则 $Ax=0$ 有无穷多解.

A. A 不一定是方阵，就更不用说行列式了.

B. $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 反例.

C. $A=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 反例.

D. 设两个解为 η_1,η_2. 于是 $k(\eta_1-\eta_2)$ 就是 $Ax=0$ 的解.

$k\in\mathbb{R}$.

9. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在 C 使得 $AC-CA=B$，并求出此时所有的 C.

令 $C=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$ 于是 $AC-CA=B$ 即:

$$\begin{bmatrix}-x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4\\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$$

i.e. $\left[\begin{array}{cccc|c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right]$ 有解. 也就是第4题的情况.

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right] \Rightarrow \text{故 } a=-1 \quad b=0$$

其时求出通解为: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$

$$\Downarrow$$

$$C=\begin{bmatrix}1+k_1+k_2 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{bmatrix}.$$

10. $\alpha_i\ (i=1,2,3,4)$ 是4维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，

向量空间

记 $A_{4\times4}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求解 $Ax=b$.

Way 1: $R(A)=3$，先求 $Ax=0$ 的解：

$$(\underset{\substack{\| \\ 2\alpha_2-\alpha_3}}{\alpha_1},\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

∴ 解为 $k(1,-2,1,0)^T,\ k\in\mathbb{R}$.

再求 $Ax=b$ 的特解，显然是 $\eta=(1,1,1,1)^T$.

∴ 通解为 $(1,1,1,1)^T+k(1,-2,1,0)^T,\ k\in\mathbb{R}$

Way 2（本题不奏效）

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&&&\\-2&1&&\\+1&&1&\\0&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

如果 $\overset{\substack{A\\ \|}}{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)}$ 是可逆的，i.e. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

则两边乘 A^{-1} 即可得到一个熟悉的方程组.

11. 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1$ 有公共解，求 a 与通解.

Way 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right]$$ 有解.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right]$$

$\therefore$ $a=1$ 时: 通解为 $k(1,0,-1)^T$

$a=2$ 时: 通解为 0.

Way 2: 当 $a-1=0$ 时，公共解存在且为 0 解.

当 $a-1\neq 0$ 时，则说明公共解非 0 解. 故 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = 0$

$\parallel$

$(a-1)(a-2)$

再对 $a=2$ 进行验证即可

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ 有解.

12. 已知：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

必然有无穷组解.

同解，求 a, b, c 的值与通解.

$$\therefore \quad R\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} < 3 \quad \text{i.e.} = 2. \qquad \therefore a = 2.$$

求出前者的通解为： $k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

代入后式可得：
$$\begin{cases} -b + c = 1 \\ -b^2 + c = 1 \end{cases}$$

故
$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} b = 1 \\ c = 2 \end{cases}.$$