线代：初等变换，线性相关性与线性方程组

席睿恩　戴云舒

2025 年 5 月 11 日

例题 1 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$：

(1) 判断 A 是否可逆，若可逆则求出 A^{-1}.

(2) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$，求 $AX = B$ 的解.

(3) 若 $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -4 \end{pmatrix} \leftrightarrow A$，且有 $PA = C$，求出 P.

例题 2 有矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{n\times l}$，$C_{n\times l}$：

(1) 若 $R(A) = n$，证明：$R(AB) = R(B)$.

(2) 若 $R(A) = n$，且 $AB = AC$, 证明：$B = C$.

(3) 若 $R(A) = m$，则类似地有哪些结论成立？

例题 3 已知 $AB = C$，且 $|B| \neq 0$，则下列说法正确的是：

A. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

B. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

C. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

D. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

例题 4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 n 维列向量，A 为 $m \times n$ 矩阵，下列说法正确的是：

A. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

B. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性无关.

C. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

D. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性无关.

例题 5 记 $\alpha_1 = (1,3,1)^T$，$\alpha_2 = (2,1,3)^T$，$\alpha_3 = (4,5,2)^T$，$\alpha_4 = (7,9,10)^T$，求 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 这个向量组的一个最大无关线性组.

例题 6 设向量组 $\alpha_1=(1,1,k)^T$，$\alpha_2=(-1,k,1)^T$，$\alpha_3=(-k,1,-1)^T$，$\alpha_4=(1,4,5)^T$，问：

(1) 参数 k 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量组的一个最大线性无关组？

(2) 参数 k 为何值时，α_1,α_2 是向量组的一个最大线性无关组？并在此时，求出 α_3,α_4 由最大线性无关组表出的线性表达式.

例题 7 (1) 设 $A_{m\times n}B_{n\times l}=\mathbf{0}$，问 $R(B)$ 的取值范围.

(2) 记 $M=\begin{pmatrix} A_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times l} \\ C_{m\times n} & B_{m\times l}\end{pmatrix}$，若 $A_{n\times n}$ 可逆，证明：$R(M)\geq R(B)+n$.

(3) 证明：$R(AB)\geq R(A)+R(B)-n$.

例题 8 记 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 若 $b=(0,0,0)^T$，且 $Ax=b$ 的通解.

(2) 若 $b=(1,2,3)^T$，且 $Ax=b$ 的通解.

例题 9 当 a 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} -x_1-4x_2+x_3 = 1 \\ ax_2-3x_3 = 3 \\ x_1+3x_2+(a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷组解. 若有解则求出其通解.

例题 10 当 a,b 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} -x_1-x_2-2x_3+3x_4 = 0 \\ x_1-3x_2-5x_3+2x_4 = -1 \\ x_1+x_2+ax_3+4x_4 = 1 \\ x_1+7x_2+10x_3+7x_4 = b \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷组解. 若有解则求出其通解.

例题 11 设向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2=(-1,3,1,7)^T,\alpha_3=(-2,-5,a,10)^T,\alpha_4=(3,2,4,7)^T$，$\beta=(0,-1,1,b)^T$，讨论 a,b 取何值时有：

(1) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出.

(2) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，并求出其表达式.

例题 12 当 a 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n = 0 \\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解，并求出其通解.

例题 13 非齐次线性方程组 $A_{n\times m}x=b$ 有解的充分条件是 (　　)

A. $R(A)=m$.

B. A 的行向量组线性相关.

C. $R(A)=n$.

D. A 的列向量组线性相关.

例题 14 下列命题正确的是 (　　)

A. 若 $Ax=b$ 有唯一解，则 $|A|=0$.

B. 若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解.

C. 若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷组解.

D. 若 $Ax=b$ 有两个不同的解，则 $Ax=0$ 有无穷多组解.

例题 15 设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 取何值时，存在 C 使得 $AC-CA=B$，病求出此时所有满足条件的 C.

例题 16 记 $\alpha_i(i=1,2,3,4)$ 是 4 维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，令 $A_{4\times 4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求 $Ax=b$ 的通解.