2 矩阵

(1) 设 A^* 为 3 阶方阵 A 的伴随矩阵，若 $|A|=-8$，则 $|(\frac{1}{4}A)^*+4A^{-1}|=$

(2)
若方阵 A,B 满足 $(AB)^2=E$，则 $(BA)^2=E$；√
若方阵 A,B 均不可逆，则 $A+B$ 必不可逆；×
若方阵 A,B 均不可逆，则 AB 必不可逆。√
则上述说法中正确的个数是 (2) 个。

(3) 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零实方阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，求 $|A|$.

(4) 设 A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $m\times n$ 矩阵，如果 E_n-AB 可逆，证明：E_m-BA 也可逆，并求 $(E_m-BA)^{-1}$。

(1). $|(\frac{1}{4}A)^*+4A^{-1}| = |4A^{-1}|\frac{1}{4}A|+4A^{-1}| = |-\frac{1}{2}A^{-1}+4A^{-1}| = |\frac{7}{2}A^{-1}| = -\frac{7}{16}$

(2) ① $ABAB=E \Rightarrow A,B$ 可逆.

$\Rightarrow ABABA=A$ 左乘 A^{-1} 得 $BABA=E$ (√)

② 错. $A=\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&\\&1\end{pmatrix}$ $A+B$ 可逆.

③ 若 $A.B$ 为 n 阶方阵

$R(AB)\leq\min\{R(A),R(B)\}<n$，$AB$ 不可逆 (√)

(3). $A=(a_{ij})=(-A_{ij})$

$\Rightarrow -A=(A_{ij}) \Rightarrow A^*=(-A)^T=-A^T$

若 A 可逆，$|A^*|=|A^{-1}|A||=|A|^2$.

那么：$|A|^2=(-1)^3|A|=-|A| \xRightarrow{(|A|\neq0)} |A|=-1$

下证 A 可逆：$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$
$=-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2$ 同理 $|A|=-\sum_{i=1}^{3}a_{2i}^2=-\sum_{j=1}^{3}a_{3j}^2$

若 $|A|=0$，则 $a_{ij}=0 \Rightarrow A=0$，与题设矛盾.

$\Rightarrow A$ 可逆，$|A|=-1$

(4) 设 $E-AB$ 的逆为 C.

$\Rightarrow C(E-AB)=E$

注意到 $C(E-AB)A = CA\underline{(E-BA)} = A$

将右边也配出 $E-BA$:

$$E - BCA(E-BA) = E-BA$$

$$\Rightarrow (E+BCA)(E-BA)=E$$

$$\therefore (E-BA)^{-1} = E+BCA$$

若只说明可逆:

$$\begin{vmatrix} E_n & A \\ B & E_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n-AB & A \\ O & E_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & A \\ 0 & E_m-BA \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow |E_n-AB| = |E_m-BA|$

故 E_n-AB 可逆 $\Leftrightarrow$ E_m-BA 可逆.

行列式降阶公式:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\,|D-CA^{-1}B| = |D|\,|A-BD^{-1}C|$$, 当 A,D 均可逆

$R\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & 0 \end{pmatrix}$

(1) 设A为n阶方阵，且α为n维列向量，若$R(A) = \cancel{R(A|\alpha)}$，则线性方程 (A) $Ax = \alpha$必有无穷多解 (B) $Ax = \alpha$必有唯一解 (C) $r\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O$仅有零解 (D) $r\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O$必有非零解

(2)当a取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

无解，有唯一解和无穷多解，并在无穷多解时求出其通解。

(1) $R\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & 0 \end{pmatrix} = R(A) < n+1 \Rightarrow$ 非零解，(D)

(2)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

① 当$a \neq -2$且$a \neq 1$时，唯一解

② 当$a = -2$时，

代入：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \underbrace{0 & -9} \end{pmatrix}$$ 无解.

③ 当$a = 1$时，

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ 无穷多解

求出 $Ax = 0$ 基础解系：

$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

特解：$\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

通解：$x = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

矩阵与行列式 答案

行列式

1.

(1)

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

求 $-2A_{31}-4A_{32}+A_{34}$

构建

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$\therefore -2A_{31}-4A_{32}+A_{34}=|D_1|$

$=90$

(2) $\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=-2$

求 $\det(3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_1)$

$\det(3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_1)$

$=\det(3\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_1)$

$+\det(\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_1)$

$=\det(3\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3)$

$+\det(\alpha_3,-\alpha_2,\alpha_1)$

$=6-2=4$

(3)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}$$

对第i行列.

$a_i\times\left(-\frac{c_i}{a_i}\right)$ 加到第1列

$$=\begin{vmatrix} a_1-\sum_{n=2}\left(\frac{b_ic_i}{a_i}\right) & & & \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n-\sum_2^n\left(\frac{b_ic_i}{a_i}\right)a_2\cdots a_n$$

(4)

$$|A|=\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1-a_1+\sum_2^n\frac{a_1x_i}{a_i} & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(x_1-a_1+\sum_2^n\frac{a_1x_i}{a_i}\right)a_2\cdots a_n$$

(5)

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_1 & \cdots & & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sum_1^n a_i+b & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \\ \sum_1^n a_i+b & \cdots & & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_1^n a_i+b\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots & & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_1^n a_i+b\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & -b \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\left(\sum_1^n a_i+b\right)b^{n-1}$$

(6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

$$=-a^4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

$$+b^4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & d \\ a^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

$$-c^4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

$$+d^4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$=-a^4(b-c)(c-d)\overset{(d-b)}{\cancel{(d-1)(b-1)(c-1)}}$

$+\cdots$

后续用范德蒙德行列式即可