线性代数讲座: 相似, 二次型, 线性空间

李长浩　杨磊

2025 年 6 月 7 日

1　相似与线性空间

1. 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,3$, 则行列式 $\left|\boldsymbol{A}^3-6\boldsymbol{A}^2+12\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}_3\right|=$_______.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

A. $\begin{bmatrix}-2&&&\\&-2&&\\&&-2&\\&&&-2\end{bmatrix}$　*B.* $\begin{bmatrix}-2&&&\\&-2&&\\&&-2&\\&&&0\end{bmatrix}$　*C.* $\begin{bmatrix}-2&&&\\&-2&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}$　*D.* $\begin{bmatrix}-2&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}$

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{bmatrix}$ 相似.

1. 求 a,b 的值;
2. 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵;
3. 求可逆阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

4. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{bmatrix}$ 只有两个不同的特征值, 并且相似于一个对角矩阵, 试求 a,b 的值.

5. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 并且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 试求可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

6. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, 并且向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_1 的一个特征向量. 试求矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}_3$.

7. 设 $a\neq b$ 是两个实数, 并且 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $(\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{E}_n)(\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}_n)=\boldsymbol{O}$, 证明 $r(\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{E}_n)+r(\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}_n)=n$, 并且 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵.

8. 设有三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $-1,1$ 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

1. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;
2. 令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, 试求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$;
3. 判断是否存在可逆阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

9. 设 V 为所有二阶方阵, 按照通常矩阵的加法和数乘所构成的线性空间. 给定可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 在 V 上定义如下相似变换 $T(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

1. 证明 T 是 V 上的一个线性变换;
2. 如果 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$, 求出线性变换 T 在如下基下的矩阵:

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

2 二次型

10. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})=n$，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j,$$

记 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

11. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_3$，$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$

1. 求一个可逆矩阵$\boldsymbol{C}$, 使得 $f(x_1,x_2,x_3)$ 可用合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为规范型;

2. 记 $g(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为$\boldsymbol{B}$, 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵;

3. 求一个可逆矩阵$\boldsymbol{T}$, 使得在合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$ 下可将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 与 $g(x_1,x_2,x_3)$ 同时化为标准型.

12. 设多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3+x_2$

1. 写出该多项式的二次型部分的矩阵$\boldsymbol{A}$;

2. 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵;

3. $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 表示什么曲面? 请说明理由.

13. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

1. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型;

2. 证明：$\displaystyle\min_{\boldsymbol{x}\neq 0}\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

14. 试求平面 $x+2y+2z=0$ 包含在椭球体 $x^2+2y^2+4z^2\leq 8$ 内部的那部分平面块的面积.

15. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, 与$\boldsymbol{A}$ 合同但不相似的矩阵为（　）

A. $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$　*B.* $\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$　*C.* $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$　*D.* $\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}$

16. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$ 的负惯性指数 q 为 ______.