二次型

① 研究二次曲线的几何性质

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $S=\pi ab$

因为正定

$x^2+xy+y^2=1$ $S=?$ 经过某种变换 变为上述形式

② $f(x)=x^TAx$ $A^T=A$

③ 如何化为标准形？

换元：$x=Cy$ $f(x)=y^TC^TACy=y^T(C^TAC)y=g(y)$

C 可逆 $\Downarrow$ B

$B=C^TAC$ 合同（在二次型里提出的） 充要条件：正负惯性指数相同

合同必等价 秩不变

配方法（C 可逆） 一般会改变图形形状 “扭曲” 但图形类型不变

正交变换法（C 正交） 旋转变换 ✓

步骤： ① 求 A 的 λ，ξ

② $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n \xrightarrow[\text{正交化}]{\text{单位化}} \eta_1,\eta_2\cdots\eta_n$

③ $Q=[\eta_1,\eta_2\cdots\eta_n]$ $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$

④ 正定

充要条件： 特征值全正 ✓ 各阶顺序主子式全正

负定：充要条件：奇数阶顺序主子式为负

偶 正

10. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})=n$，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$，二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j,$$

记 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解：二次型 $f(x)$ 的矩阵为

$$B=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \cdots & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}(A^*)^T$$

由于 $A^T=A$ 则 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$ A^{-1} 也是实对称矩阵

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 故 A^* 也为实对称矩阵

则 $B=\frac{1}{|A|}A^*=A^{-1}$

11. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_3$，$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$

1. 求一个可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使得 $f(x_1,x_2,x_3)$ 可用合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$ 化为规范型;
2. 记 $g(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为$\boldsymbol{B}$，求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BC})\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵;
3. 求一个可逆矩阵$\boldsymbol{T}$，使得在合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ty}$ 下可将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 与 $g(x_1,x_2,x_3)$ 同时化为标准型.

解：(1) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3)^2+x_2^2+x_3^2$ 令 $y_1=x_1-x_3$ $y_2=x_2$ $y_3=x_3$

即 $x_1=y_1+y_3$ $x_2=y_2$ $x_3=y_3$ $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$

$x=Cy$，即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 显然 C 可逆，所以可用合同变换 $x=Cy$ 化为标准形

即 $C^TAC=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

(2)
$$C^TBC=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

其特征值为 $1, 2, -1$ 对应特征向量为 $(1,0,-1)^T$ $(1,-1,1)^T$ $(1,2,1)^T$

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad Q^T(C^TBC)Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) 考虑 $T=CQ$ 则 T 可逆 由(2)知 T 可把 g 化为标准形 $T=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

而 $T^TAT=Q^T(C^TAC)Q=Q^TQ=E$ 也可把 f 化为标准形

12. 设多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3+x_2$

1. 写出该多项式的二次型部分的矩阵$\boldsymbol{A}$;

2. 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵;

3. $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 表示什么曲面？请说明理由.

解：(1) $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

(2) $|A-\lambda E|=(\lambda-1)(\lambda-2)\lambda=0$ $\quad\lambda_1=0\quad\lambda_2=1\quad\lambda_3=2$

特征向量分别为 $\xi_1=(1,0,1)^T\quad\xi_2=(0,1,0)^T\quad\xi_3=(-1,0,1)^T$

进行单位化 拼为 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\qquad Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(3) 正交变换具有旋转不变性 作换元 $x=Qy$

$f=x^TAx+(0,1,0)x=y^T\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}y+(0,1,0)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}y$

$=y_2^2+2y_3^2+y_2=(y_2+\frac12)^2+2y_3^2-\frac14$

由于 $f=0$ 则 $(y_2+\frac12)^2+2y_3^2=\frac14$ $\qquad f=0$ 为椭圆柱面

13. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

1. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型;

2. 证明：$\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq 0}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

解：(1) $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{pmatrix}\qquad|A-\lambda E|=(\lambda-2)(\lambda-4)^2$

$\lambda_1=2\quad\xi_1=(-1,0,1)^T\qquad\lambda_2=\lambda_3=4\quad\xi_2=(0,1,0)^T\quad\xi_3=(1,0,1)^T$

单位化 拼在一起 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\qquad Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

(2) $x=Qy\qquad f(x)=2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2\geq 2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2=2y^Ty=2x^Tx$

$x\neq0$ 时 $\frac{f(x)}{x^Tx}\geq 2$ $\qquad$ 令 $x_0=Q\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\qquad\frac{f(x_0)}{x_0^Tx_0}=2$ $\qquad$ 得证

14. 试求平面 $x+2y+2z=0$ 包含在椭球体 $x^2+2y^2+4z^2\le 8$ 内部的那部分平面块的面积.

解：平面块 Σ，Σ 在 xOy 面上投影 D.

$$\begin{cases} x^2+2y^2+4z^2=8 \\ x+2y+2z=0 \end{cases} \xRightarrow{\text{消}z} x^2+2xy+3y^2=4 \quad \text{椭圆}$$

$$S=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \frac{3}{2}\iint_D dxdy = \frac{3}{2}S_D \qquad D: x^2+2xy+3y^2\le 4$$

存在正交变换 $x^2+2xy+3y^2 \to \lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2$　　$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2\le 4$

$$\frac{x^2}{\frac{4}{\lambda_1}}+\frac{y^2}{\frac{4}{\lambda_2}}\le 1 \qquad S_D=\pi\cdot 4\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}=4\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\pi$$

$$S=\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{2}\pi = 3\sqrt{2}\pi$$

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，与 $\boldsymbol{A}$ 合同但不相似的矩阵为（　）

A. $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}$

解：题目与选项均为实对称矩阵

两个实对称矩阵相似的充要条件为特征值相同

合同的充要条件为正、负惯性指数相同

$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 特征值为 0，2　　$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 特征值为 0，1

$\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ 特征值为 0，2　　$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 特征值为 -1，1

$\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$ 特征值为 0，-2　　选 A

16. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$ 的负惯性指数 q 为 ______.

解：
$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

$$f=y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_2y_3-y_1y_3+y_2y_3=y_1^2-y_2^2+2y_2y_3$$
$$=y_1^2-(y_2-y_3)^2+y_3^2$$

负惯性指数为 1