1. 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3, 则行列式 $|\boldsymbol{A}^3-6\boldsymbol{A}^2+12\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}_3|=$______.

Sol 记 $f(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-5$，则 $f(A)$ 的特征值为 $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$. 故行列式 $|f(A)|=2\times3\times4=24$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

B

A. $\begin{bmatrix}-2&&&\\&-2&&\\&&-2&\\&&&-2\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}-2&&&\\&-2&&\\&&-2&\\&&&0\end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix}-2&&&\\&-2&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix}-2&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}$

Sol 设 λ 是 A 的特征值，则 $\lambda^4+2\lambda^3=0$，故 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-2$. 由 A 实对称可知 A 相似于对角矩阵 Λ，且 $r(A)=r(\Lambda)=3$，且 Λ 的特征值只有 $0,-2$.

3. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{bmatrix}$ 只有两个不同的特征值, 并且相似于一个对角矩阵, 则 $a=$__1__, $b=$__1__ / 或 $a=-1, b=3$

Sol A 的特征多项式 $\varphi(A)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)(\lambda-1)(\lambda-3)$，由 A 只有 2 个不同特征值可见 $b=1$ 或 $b=3$.

Case I $b=1$. 此时 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&1\end{bmatrix}$，且 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$. 由 A 相似于对角阵可见 $r(E-A)=1$, $r(3E-A)=2$. 于是由

$$E-A\sim A-E=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&a&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\0&a-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可知 $a=1$，此时有

$$3E-A\sim A-3E=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\1&1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&2&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

知 $r(3E-A)=2$，符合要求.

Case II $b=3$. 此时 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&3\end{bmatrix}$，且 A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=3$. 由 A 相似于对角阵可见 $r(E-A)=2$, $r(3E-A)=1$. 于是由

$$3E-A\sim A-3E=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\1&a&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&a+1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可知 $a=-1$，且此时

$$E-A \sim A-E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

也符合题意.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 相似.

1. 求 a, b 的值;
2. 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵;
3. 求可逆阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}$.

Sol (1) 由 A 与 B 相似有

$$\operatorname{tr}(A) = a+3 = \operatorname{tr}(B) = b+2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 2a-3 = |B| = b$$

解得 $a=4, b=5$.

(2) 计算 A 的特征多项式

$$\varphi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-5)$$

于是 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 5$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，由

$$A-E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可知有线性无关的特征向量 $\alpha_1 = (2,1,0)^T$，$\alpha_2 = (3,0,-1)^T$

对于 $\lambda_3 = 5$，由

$$A-5E = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可知有特征向量 $\alpha_3 = (1,1,-1)^T$. 令 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 有 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$.

(3) 由 A, B 相似有 B 的特征值也是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 5$. 对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，由

$$B-E=\begin{bmatrix}0&-2&0\\0&4&0\\0&3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可知有线性无关的特征向量 $\beta_1=(1,0,0)^T$, $\beta_2=(0,0,1)^T$.

对于 $\lambda_3=5$, 由

$$B-5E=\begin{bmatrix}-4&-2&0\\0&0&0\\0&3&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&0\\0&3&-4\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可知有特征向量 $\beta_3=(2,-4,-3)^T$. 于是令 $\widetilde{P}=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 有

$$\widetilde{P}^{-1}B\widetilde{P}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{bmatrix}=P^{-1}AP$$

于是令 $Q=P\widetilde{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-\frac{3}{2}&3\\1&\frac{1}{4}&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$ 即可.

5. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 并且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 试求可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵.

Sol 由题意 $A\beta=3\beta$, 其中 $\beta=(1,1,1)^T$. 于是令 $Q=[\beta,\alpha_1,\alpha_2]$ 就有 $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$.

6. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, 并且向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_1 的一个特征向量. 试求矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}_3$.

Sol 由题意知 B 的特征值为 $\mu_1=-2$, $\mu_2=\mu_3=1$, 并且 B 是实对称矩阵. 注意到

$$B\alpha_1=\mu_1\alpha_1$$

即 α_1 是 B 属于 μ_1 的特征向量. 由 B 实对称, 则 B 属于 $\mu_2=\mu_3=1$ 的特征向量 $\beta=(x,y,z)^T$ 与 α_1 正交, 即 $x-y+z=0$, 于是结合 B 一定可对角化, 得到属于 $\mu_2=\mu_3=1$ 的两个线性无关特征向量 $\beta_1=(1,0,-1)^T$, $\beta_2=(1,1,0)^T$. 于是令 $P=[\beta_1,\beta_2,\alpha_1]$ 有

$$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}:=\Lambda$$

故 $B=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$.

7. 设 $a \neq b$ 是两个实数, 并且 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $(\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{E}_n)(\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}_n)=O$, 证明 $r(\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{E}_n)+r(\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}_n)=n$, 并且 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵.

Pf 一方面由 $(A+aE_n)(A+bE_n)=0$ 有

$$r(A+aE_n)+r(A+bE_n)\leq n$$

另一方面有

$$r(A+aE_n)+r(A+bE_n)\geqslant r((A+aE_n)-(A+bE_n))=n$$

因此 $r(A+aE_n)+r(A+bE_n)=n$.

设 λ 是 A 的特征值. 则有 $(\lambda+a)(\lambda+b)=0$, 故 λ 只能是 $-a$ 或 $-b$. 不妨假设 A 的特征值既有 $\lambda_1=-a$, 也有 $\lambda_2=-b$, 否则 $A=-aE_n$ 或 $B=-bE_n$. 结论显然成立.

设 $\varphi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda+a)^{m_1}(\lambda+b)^{m_2}$, 其中 $m_{1,2}$ 分别是 $\lambda_1=-a$ 和 $\lambda_2=-b$ 的代数重数. 记 $n_1=n-r(A+aE_n)$, $n_2=n-r(A+bE_n)$, 即 $\lambda_{1,2}$ 的几何重数. 则有 $n_1\leq m_1$, $n_2\leq m_2$. 若有一个等号不成立, 则

$$n_1+n_2=2n-r(A+aE_n)-r(A+bE_n)=n$$

$$<m_1+m_2=n.$$

矛盾. 故 $m_1=n_1$, $m_2=n_2$. 即 A 相似于一个对角阵. $\square$

8. 设有三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $-1,1$ 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

1. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;
2. 令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, 试求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$;
3. 试求可逆阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

(1) Pf 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$, 则有

$$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)=-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

则有 $2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$, 而 α_1 与 α_2 线性无关, 则 $k_1=k_3=0$, 那么 $k_2\alpha_2=0$, 但 $\alpha_2\neq0$, 只能 $k_2=0$,

因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(2) Sol 由条件有 $A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, 于是 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

(3) Sol 注意 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$, 但 $n(A-E)=2$, 说明特征值 1 的几何重数

为1，但代数重数为1，故A不可对角化.

9. 设 V 为所有二阶方阵，按照通常矩阵的加法和数乘所构成的线性空间. 给定可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 在 V 上定义如下相似变换 $T(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

1. 证明 T 是 V 上的一个线性变换;

2. 如果 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$，求出线性变换 T 在如下基下的矩阵:

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

(1) Pf 由于 $T(A+B)=P^{-1}(A+B)P=P^{-1}AP+P^{-1}BP=T(A)+T(B)$,

$$T(aA)=P^{-1}(aA)P=a(P^{-1}AP)=aT(A)$$

对 $A,B\in V$, $a\in\mathbb{R}$ 都成立，故T是V上的线性变换.

(2) Sol 对此P有 $P^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$，则有

$$T(E_{11})=\begin{bmatrix}2&2\\0&0\end{bmatrix}=2E_{11}+2E_{12}$$

$$T(E_{12})=\begin{bmatrix}-1&-2\\0&0\end{bmatrix}=-E_{11}-2E_{12}$$

$$T(E_{21})=\begin{bmatrix}0&0\\-1&-1\end{bmatrix}=-E_{21}-E_{22}$$

$$T(E_{22})=\begin{bmatrix}0&0\\2&4\end{bmatrix}=2E_{21}+4E_{22}$$

即

$$T(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{2},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix}2&-1&&\\2&-2&&\\&&-1&-1\\&&2&4\end{bmatrix},$$

于是所求矩阵即为 $\begin{bmatrix}2&-1&&\\2&-2&&\\&&-1&-1\\&&2&4\end{bmatrix}$.