数学外卖线性代数讲座——期末复习

李长浩、刘欣晨

2024 年 12 月 20 日

1 行列式、矩阵、线性方程组

题目 1.1. 设二次型

$$f = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i x_{n-i+1}$$

其中 a,b 为实数，n 为偶数，若 f 正定，则（ ）

(A) $a > b$　(B) $|a| > b$　(C) $a > |b|$　(D) $a \geq |b|$

题目 1.2. 设 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = A_{41} - A_{42} + A_{43} + 10$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，则 a,b 的值为

(A) $a = 4, b = 1$　(B) $a = 1, b = 4$　(C) $a = 4$,b 为任意常数　(D) $a = 1$,b 为任意常数

题目 1.3. 设$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则下面说法错误的是（ ）

(A) 对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\xi}$，有 $\boldsymbol{A\xi} = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$

(B) 对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\xi}$，有 $\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{A\xi} = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$

(C) 对任意的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$

(D) 任意的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$

题目 1.4. 已知$\boldsymbol{A}$ 为 n阶矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,记矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} \end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3，则（ ）

(A) $r_1 = r_2 \geq r_3$　(B) $r_1 = r_2 \leq r_3$　(C) $r_1 = r_3 \geq r_2$　(D) $r_1 = r_3 \leq r_2$

题目 1.5. 设 4 阶矩阵$\boldsymbol{A}$=$\left[a_{ij}\right]$ 不可逆，且元素 a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$，若矩阵$\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$，$k_1, k_2, k_3$ 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为（ ）

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + k_3\boldsymbol{\alpha_3}$ (B) $k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + k_3\boldsymbol{\alpha_4}$ (C) $k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_3} + k_3\boldsymbol{\alpha_4}$ (D) $k_1\boldsymbol{\alpha_2} + k_2\boldsymbol{\alpha_3} + k_3\boldsymbol{\alpha_4}$

题目 1.6. 已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均是 2×4 矩阵，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{\alpha_1} = \left[1, 1, 2, 1\right]^T$,$\boldsymbol{\alpha_2} = \left[0, -3, 1, 0\right]^T$，$\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{\beta_1} = \left[1, 3, 0, 2\right]^T$,$\boldsymbol{\beta_2} = \left[1, 2, -1, a\right]^T$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$（求出一个即可）;

(2) 如果 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 有非零公共解，求 a 的值及所有非零公共解.

题目 1.7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×2 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 2×3 矩阵，$\boldsymbol{AB}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{BA}=$ ________

2 向量组、相似与二次型、线性空间

题目 2.1. 若 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$,$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$,$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)=4$, 求 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5)=3$

题目 2.2. 设 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$ 判断 A 是否可对角化，若可以则将其对角化

题目 2.3. A 为是三阶矩阵，且 $A^2+2A-3E=0$, 则 A^2 的特征值为

题目 2.4. A 满足 $A^2-6A+5E=0$, 则 A 可对角化，特征值只能为 2,3

题目 2.5. 若 A 是正定矩阵，证明：$B=A+A^{-1}-2E_n$ 的特征值都非负

题目 2.6. 下列矩阵中与 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 合同的是（ ）

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

题目 2.7. 三阶方阵 A 的特征值为 1，2，3，求行列式 $|A^3-6A^2+11A-6E|$

题目 2.8. 判断 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ 是否可对角化