① 线代是研究什么的？

$\left\{\begin{array}{l}\text{解线性方程组} \\ \text{对数据进行处理，研究数据的关系上（现代）}\end{array}\right.$

② 线代问题的理解角度

Ⅰ. 向量组观点

矩阵是由向量所"构成"的 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \beta_2^T\\ \vdots\\ \beta_n^T\end{pmatrix}$

例：$r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$ AB的行向量均可由B的行向量线性表示

例：$Ax=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,\beta)$ $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$

$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$

Ⅱ. 方程组观点

矩阵的秩 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 中"有效"方程的个数 $\begin{cases}x_1+x_2=0 & \text{有效}\\ 2x_1+2x_2=0 & \text{无效}\end{cases}$

Ⅲ. 高维空间下线性变换观点

$Ax=\beta \Leftrightarrow$ 对向量x作线性变换A得到β

例：$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ 旋转变换（90度）

例：$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ 伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x\\ y'=y\end{cases}$

③ $\underbrace{\text{行列式、矩阵}}_{\text{基础}}$、$\underbrace{\text{向量组、方程组}}_{\text{主题}}$、$\underbrace{\text{特征值、二次型}}_{\text{应用}}$

题目 1.1. 设二次型

$$f = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i x_{n-i+1}$$

其中 a,b 为实数，n 为偶数，若 f 正定，则 ( )

(A) $a > b$　　(B) $|a| > b$　　(C) $a > |b|$　　(D) $a \geq |b|$

本题难点在于行列式的计算

解：设 $n = 2k$，二次型矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{pmatrix}_{2k} \qquad |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a-\lambda & b & & \\ & & b & a-\lambda & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a-\lambda \end{vmatrix}_{2k}$$

$$= (a-\lambda+b)\begin{vmatrix} 1 & & & & & b \\ 1 & \ddots & & & \iddots & \\ \vdots & & a-\lambda & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a-\lambda & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda+b)\begin{vmatrix} 1 & & & & & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & -b \\ 0 & & a-\lambda & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a-\lambda & & \\ \vdots & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & & & & & a-\lambda-b \end{vmatrix}_{2k} = (a-\lambda+b)\begin{vmatrix} a-\lambda & & & & -b \\ & \ddots & b & 0 & \vdots \\ & & b & a-\lambda & \\ & \iddots & 0 & & \ddots \\ b & & & & \\ 0 & \cdots & & & a-\lambda-b \end{vmatrix}_{2k-1}$$

$$= (a-\lambda+b)(a-\lambda-b)\begin{vmatrix} a-\lambda & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a-\lambda & b & & \\ & & b & a-\lambda & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a-\lambda \end{vmatrix}_{2k-2} = (a-\lambda+b)^k (a-\lambda-b)^k = 0$$

$\lambda_1 = a+b > 0$

$\lambda_2 = a-b > 0$　$\Rightarrow$　$a > |b|$

选 C

题目 1.2. 设 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = A_{41} - A_{42} + A_{43} + 10$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，则 a,b 的值为

(A) $a=4, b=1$　　(B) $a=1, b=4$　　(C) $a=4$, b 为任意常数　　(D) $a=1$, b 为任意常数

解：$A_{41} - A_{42} + A_{43} + \underline{0A_{44}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & a & b \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & a-3 & b+9 \end{vmatrix} = -10\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & a-3 \end{vmatrix} = 10$$

$a = 4$，$b \in R$　选 C

题目 1.3. 设 A 为 n 阶矩阵，则下面说法错误的是（ ）

(A) 对任意的 n 维列向量 ξ，有 $A\xi=0$，则 $A=O$

(B) 对任意的 n 维列向量 ξ，有 $\xi^TA\xi=0$，则 $A=O$ → 是否存在非零变换A，当A作用在ξ上后，和原来的位置正交？

(C) 对任意的 n 阶矩阵 B，有 $AB=O$，则 $A=O$

(D) 任意的 n 阶矩阵 B，有 $B^TAB=O$，则 $A=O$

解：A. 取一组单位正交基：$\alpha_1=(1,0,0\cdots0)^T \cdots \alpha_n=(0,0,\cdots 1)^T$

$A\alpha_1=0 \Rightarrow a_{11}=0 \quad a_{21}=0 \quad \cdots \quad a_{n1}=0$

故 $a_{ij}=0 \Rightarrow A=0$

B 取 $A^T=-A\neq 0$

$\xi^TA\xi=\xi^TA^T\xi=-\xi^TA\xi$ 故 $\xi^TA\xi=0$ B错误

C、D 取 $B=E$ 则 $A=0$

题目 1.4. 已知 A 为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，记矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ A^T & E\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} O & A^TA \\ A^T & E\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} A^T & E \\ A^TAA^T & A^TA\end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3，则（ ）

(A) $r_1=r_2\geq r_3$　(B) $r_1=r_2\leq r_3$　(C) $r_1=r_3\geq r_2$　(D) $r_1=r_3\leq r_2$

解：

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & E\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -AA^T & 0 \\ A^T & E\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -AA^T & 0 \\ 0 & E\end{pmatrix} \quad r_1=r(-AA^T)+n = r(A)+n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A^TA \\ A^T & E\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -A^TAA^T & 0 \\ A^T & E\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -A^TAA^T & 0 \\ 0 & E\end{pmatrix} \quad r_2=r(-A^TAA^T)+n$$

$$\begin{pmatrix} A^T & E \\ A^TAA^T & A^TA\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A^T & E \\ 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad r_3=n$$

$r(A^T)\geq r(A^TAA^T)\geq r(A^TAA^TA)=r((A^TA)^TA^TA)=r(A^TA)=r(A)$

$r(A^TAA^T)=r(A)$　　$r_1=r_2\geq r_3$　选A

复习：① 分块矩阵的初等变换

舒尔公式：行变换左乘

列变换右乘

② 分块矩阵的行列式 (A_m, B_n)

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B\end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C\end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

③ 秩的不等式/等式

$R(AB)\leq \min\{R(A), R(B)\}$.

$R(A+B)\leq R(A,B)\leq R(A)+R(B)$.

若 $A_{m\times n}B_{n\times s}=0$，则 $r(A)+r(B)\leq n$

（B的每一列都是 $Ax=0$ 的解向量）

$r(A)=r(A^T)=r(AA^T)=r(A^TA)$　（同解方程组）

例：$Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解

$A^TAx=0 \Rightarrow x^TA^TAx=0 \quad (Ax)^TAx=0$

$\Rightarrow Ax=0$

题目 1.5. 设 4 阶矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]$ 不可逆，且元素 a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，若矩阵 A 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数，则方程组 $A^*x=0$ 的通解为（ ）

(A) $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ (B) $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$ (C) $k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$ (D) $k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$

AC

解 $r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \quad 排除\quad 因为\ A 不可逆 \\ 1 & r(A)=n-1 \quad \checkmark \\ 0 & r(A)<n-1 \quad 排除\quad 因为\ A_{12}\neq 0\quad 故\ A^*\neq 0 \end{cases}$

$r(A^*)=1$ $\quad A^*x=0$ 解空间是三维的

$A^*A=|A|E=0$ $\quad$ 故 $A^*(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)=0$ $\quad A^*\alpha_1=A^*\alpha_2=A^*\alpha_3=A^*\alpha_4=0$

$A_{12}=\begin{pmatrix}\triangle&\triangle&\triangle&\triangle\\ \triangle&\triangle&\triangle&\triangle\\ \triangle&\triangle&\triangle&\triangle\\ \triangle&\triangle&\triangle&\triangle\end{pmatrix}$ $\quad$ 故 $\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_4$ 是线性无关的 $\quad$ 选C

题目 1.6. 已知 A,B 均是 2×4 矩阵，$Ax=0$ 的基础解系是 $\alpha_1=\left[1,1,2,1\right]^T,\alpha_2=\left[0,-3,1,0\right]^T$，$Bx=0$ 的基础解系是 $\beta_1=\left[1,3,0,2\right]^T,\beta_2=\left[1,2,-1,a\right]^T$.

(1) 求矩阵 A（求出一个即可）;

(2) 如果 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 有非零公共解，求 a 的值及所有非零公共解.

解：(1) $C=(\alpha_1,\alpha_2)$ $\quad AC=0$ $\quad C^TA^T=0$ $\quad$ 即 A^T 的列向量（A 的行向量）是 $C^Tx=0$ 的解向量.

$C^T=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-3&1&0\end{pmatrix}$ $\quad C^Tx=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(1,0,0,-1)^T$, $\xi_2=(-7,1,3,0)^T$

则 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-7&1&3&0\end{pmatrix}$

(2) 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 有非零公共解，则非零公共解既可由 α_1、α_2 线性表示也可由 β_1,β_2 线性表示 $\quad \eta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=x_3\beta_1+x_4\beta_2 \Rightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2-x_3\beta_1-x_4\beta_2=0$

$(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\1&-3&-3&-2\\2&1&0&1\\1&0&-2&-a\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&-a+3\end{pmatrix}$

当 $a=3$ 时，原方程有非零解 $k(-1,1,-2,1)^T$ $\quad$ 此时 $\eta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$

$=k(-\alpha_1+\alpha_2)=k(1,1,4,1)^T$

复习：同解问题（$AX=0$，$BX=0$）

$\Leftrightarrow \overset{(\mathrm{I})}{\alpha_1},\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 与 $\beta_1,\overset{(\mathrm{II})}{\beta_2},\cdots\beta_m$ 等价

$\Leftrightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I}\ \mathrm{II})$ $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，$AX=0$ 的解均为 $BX=0$ 的解. $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

题目 1.7. 设 A 为 3×2 矩阵，B 为 2×3 矩阵，$AB=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$，则 $BA=$______

解：$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$r(AB)=2\leq r(A)\leq 2$ $\quad r(A)=2$ $\quad$ 同理 $r(B)=2$

A 和 B^T 均为列满秩矩阵

$ABAB=A(BA)B=AB$ $\quad$ 即 $A[(BA)B-B]=0$

A 列满秩，$Ax=0$ 仅零解 $\quad (BA)B=B$ $\quad$ 即 $B^T(BA)^T=B^T$ $\quad B^T[(BA)^T-E]=0$

B^T 列满秩，$B^Tx=0$ 仅零解 $\quad (BA)^T=E$ $\quad BA=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$