数学外卖线性代数讲座——相似矩阵与二次型、线性空间

李长浩、梁海纳

2024 年 12 月 15 日

1 相似矩阵

题目 1.1. 设 V 是三维实向量空间，内积为标准内积，又已知三个线性无关的向量：

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

用 *Gram-Schmidt* 方法求得一组标准正交基。

题目 1.2. 已知 *3* 阶方阵 A 的特征值为 *1, 2, 3,* 求行列式 $|A^3 - 6A^2 + 11A - 6I|$。

题目 1.3. 设三阶矩阵 A 等于

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

问 t 为何值时 A 能对角化？

题目 1.4. 设 A 为 *4* 阶对称矩阵，且 $A^4 + 2A^3 = O$ ，若 A 的秩为 *3*，则 A 相似于：

A. $\begin{pmatrix} -2 & & & \\ & -2 & & \\ & & -2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$ *B.* $\begin{pmatrix} -2 & & & \\ & -2 & & \\ & & -2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ *C.* $\begin{pmatrix} -2 & & & \\ & -2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ *D.* $\begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

题目 1.5. 设 A 和 B 是二阶矩阵，且 $AB = BA$。则“A 有两个不相等的特征值”是“B 可对角化”的

(A) 充要条件　　*(B)* 充分不必要条件
(C) 必要不充分条件　　*(D)* 不充分也不必要条件

2 二次型

题目 2.1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A}) = n$，A_{ij} 是 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|} x_i x_j$$

记 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$，证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

题目 2.2. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_3$，$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$

(1) 求一个可逆矩阵$\boldsymbol{C}$, 使得 $f(x_1,x_2,x_3)$ 可用合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为规范型；

(2) 记 $g(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为$\boldsymbol{B}$, 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵；

(3) 求一个可逆矩阵$\boldsymbol{T}$, 使得在合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$ 下可将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 与 $g(x_1,x_2,x_3)$ 同时化为标准型.

题目 2.3. 设多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3+x_2$

(1) 写出该多项式的二次型部分的矩阵$\boldsymbol{A}$;

(2) 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 表示什么曲面？请说明理由.

题目 2.4. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

(1) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型；

(2) 证明：$\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=2$;

题目 2.5. 设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a+1 & a\\ a & a\end{bmatrix}$, 若对任意实向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$,$(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^2\leq\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 恒成立，则 a 的取值范围是 ________

题目 2.6. 设矩阵$\boldsymbol{A}$=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, 与$\boldsymbol{A}$ 合同但不相似的矩阵为（ ）

(A) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ *(B)* $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ *(C)* $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ *(D)* $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

题目 2.7. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$ 的负惯性指数 q 为 ______

3 线性空间

题目 3.1. 设 V 为所有二阶方阵，按照通常矩阵的加法和数乘所构成的线性空间。给定可逆矩阵 P 在 V 上定义如下相似变换 $T(A)=P^{-1}AP$。

1. 证明 T 是 V 上的一个线性变换。

2. 如果 $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, 求出线性变换 T 在如下基下的矩阵：

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$