数学外卖—行列式、矩阵

许子寒、赵思铭

2024 年 10 月 20 日

1 行列式

题目 1 (逐差法). 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

题目 2 (求和法). 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

题目 3 (爪形行列式). 计算 n 阶行列式，其中 $a_i \neq 0 (2 \leq i \leq n)$:

(1)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

(2)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

题目 4. 设 a, b, c 互不相同，$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0$，计算 $a+b+c$.

题目 5 (升阶法). 求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}.$$

题目 6 (升/降阶法). 计算 n 阶行列式:

(1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}.$$

(2)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & 1+a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}.$$

题目 7. 已知 221，238，289 都是 17 的倍数，下列行列式不能被 17 整除的是:

$$(1)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad (2)\begin{vmatrix} 22 & 1 & 2 \\ 23 & 8 & 3 \\ 28 & 9 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \\ 8 & 2 & 9 \end{vmatrix} \qquad (4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \\ 9 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

题目 8. 下列 $n(n>2)$ 阶行列式必为零的是:

(1) 零元素的个数大于 $n^2/2$ (2) 零元素的个数大于 n^2-n
(3) 零元素的个数大于 n (4) 对角线上的元素全为零.

题目 9. 设 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix}$，令 M_{ij}, A_{ij} 分别表示其 (i,j) 位置上的余子式和代数余子式，计算 $M_{31}+4A_{32}+9M_{33}-16M_{34}$.

2 矩阵

题目 10. 设 A 为 n 阶对称阵，求证：A 是零矩阵的充要条件是对任意的 n 维列向量 α, 有

$$\alpha^T A\alpha = 0.$$

题目 11.

(1) 对 n 阶方阵 A, B，只要 $AB = E$，则 A, B 必为可逆矩阵且互为逆矩阵.

(2) 若只要求矩阵 A, B 满足 AB 和 BA 存在，且 $AB = E$，是否还能得出 $BA = E$?

(3) 设 n 阶方阵 A, B，满足 $A + B = AB$，证明：$AB = BA$.

题目 12.

(1) 设 A 是 n 阶方阵，且 $A \neq E$，证明：若 $A^2 = E$，则 $A + E$ 非可逆矩阵.

(2) 设 A, B 是 n 阶方阵，且 $A + 2B = 2AB$，证明 $A - E$ 可逆，并求 $(A - E)^{-1}$.

题目 13. 若 A, B 都是由非负实数组成的矩阵且 AB 有一行等于零，求证：或者 A 有一行为零，或者 B 有一行为零.

题目 14.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$，求 A^n

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 A^n

题目 15. 求证：和所有 n 阶矩阵乘法可交换的矩阵必是纯量阵 kI_n.

题目 16. 设 A 为 n 阶矩阵，求证：$|A^*| = |A|^{n-1}$.

感谢参加我们的讲座！麻烦填写一下反馈问卷，帮助我们之后更好地开展活动，谢谢！

外卖讲座反馈问卷

外卖官网：tongjimath.github.io

Bilibili：一题 _ 撬动数学