解 (a) 因为行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 35 \neq 0,$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

(b) 因为矩阵的初等行变换不改变列向量组的相关性，而

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这说明 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$ 等价于

$$\begin{cases} k_1 \quad - 3k_3 \quad = 0 \\ \quad k_2 + 9k_3 \quad = 0 \\ \qquad\qquad k_4 = 0 \end{cases}$$

这个方程组有非零解 $(3, -9, 1, 0)$。故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关，且 $\alpha_3 = -3 \cdot \alpha_1 + 9 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_4$。

4. 求出第 3 题每小问中向量组的秩以及一个极大线性无关组。

解 (a) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩是 3，一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。

(b) 由第 3 题知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩是 3，且阶梯形矩阵中主元所在列对应的原矩阵的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一个极大线性无关组。

5. 写出第 3 题 (b) 问中 $\operatorname{span}\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle$ 的一组基，以及 $\operatorname{span}\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle$ 的维数。

解 按照定义，$\operatorname{span}\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle$ 的一组基即为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组，可取为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$。而 $\operatorname{span}\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle$ 的维数等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩，为 3。

6. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，且

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \\ \quad \cdots \\ \beta_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

证明：向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

证明 若

$$k_1\beta_1 + \cdots + k_n\beta_n = 0, \tag{1}$$

则（(1) 式等价于）

$$k_1(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n)+\cdots+k_n(a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n)=0. \tag{2}$$

简单地整理后，知 (2) 式等价于

$$(k_1a_{11}+k_2a_{21}+\cdots+k_na_{n1})\alpha_1+\cdots+(k_1a_{1n}+k_2a_{2n}+\cdots+k_na_{nn})\alpha_n=0. \tag{3}$$

而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，因此 (3) 式等价于

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots+a_{n1}k_n=0\\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{n2}k_n=0\\ \qquad\qquad\qquad\cdots\\ a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\cdots+a_{nn}k_n=0\end{cases} \tag{4}$$

所以：向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关

$\iff$ 由 $k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n=0$ 可以推出 $k_1=\cdots=k_n=0$

$\iff$ 方程组 (4) 只有零解

$\iff$ 系数矩阵的行列式非零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

注 学完矩阵运算后，就能知道题中条件等价于如下的矩阵等式：

$$(\beta_1\ \cdots\ \beta_n)=(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

且上述的 (1), (3) 及 (4) 式也可以写成形式更紧凑的矩阵形式：

$$(\beta_1\ \cdots\ \beta_n)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0 \iff (\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0.$$

7. 证明：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关。

证明 必要性（左推右，$\Longrightarrow$ 方向）：显然。

充分性(右推左,$\Longleftarrow$ 方向):若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关,则存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, k_{s+1}，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k_{s+1}\beta=0.$$

断言 $k_{s+1}\neq 0$（否则，若 $k_{s+1}=0$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为 0，但 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，这与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关矛盾）。于是

$$\beta=-\frac{k_1}{k_{s+1}}\alpha_1-\frac{k_2}{k_{s+1}}\alpha_2-\cdots-\frac{k_s}{k_{s+1}}\alpha_s,$$

即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出。 $\square$

8. 证明：两个向量组等价的充分必要条件是：它们的秩相等且其中一个向量组可以由另一个向量组线性表出。

证明 必要性（左推右，$\Longrightarrow$ 方向）：这由书上结论“等价的向量组具有相同的秩”立即得到。

充分性（右推左，$\Longleftarrow$ 方向）：设向量组 S 与向量组 T 的秩相同（记为 r），且向量组 S 可由向量组 T 线性表出。设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 分别是向量组 S,T 的一个极大线性无关组，则容易知道 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可以由 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表出，并且要证向量组 S,T 等价，只需证明 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出。

下证 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出。注意到对任意 $j=1,\cdots,r$，向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_j$ 可以由 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表出，所以

$$\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_j\}\leq\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}=r<r+1,$$

这说明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_j$ 线性相关，再由第 7 题的结论知 β_j 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出。 $\square$

注 这道题体现了取极大线性无关组的想法。

学完矩阵之后，也可以用矩阵的办法证明后半部分：事实上，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可以由 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表出等价于存在 $r\times r$ 矩阵 $K=(k_{ij})$，使得

$$(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_r)=(\beta_1\ \cdots\ \beta_r)K=(\beta_1\ \cdots\ \beta_r)\begin{pmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ k_{r1}&\cdots&k_{rr}\end{pmatrix},$$

而由第 6 题的结论知矩阵 K 的行列式 $\det K\neq 0$，这说明 K 是可逆矩阵，因此

$$(\beta_1\ \cdots\ \beta_r)=(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_r)K^{-1},$$

即 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出。

9. 证明：设向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关且可由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，则存在 $\alpha_k(1\leq k\leq n)$ 使得 $\alpha_k,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关。

证明 反证法。若对任意的 $k(1\leq k\leq n)$，$\alpha_k,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关，则由于 $\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关，因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 可被 $\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出，于是

$$\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\leq\operatorname{rank}\{\beta_2,\cdots,\beta_m\}=m-1.$$

但由条件知 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，于是

$$m=\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}\leq\operatorname{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},$$

这推出 $m\leq m-1$，矛盾。 $\square$

10. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是一组线性无关的向量，若向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出如下：

$$\begin{cases}\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1m}\alpha_m\\ \beta_2=a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2m}\alpha_m\\ \quad\cdots\\ \beta_k=a_{k1}\alpha_1+a_{k2}\alpha_2+\cdots+a_{km}\alpha_m\end{cases}$$

记系数矩阵为 $A=(a_{ij})_{k\times m}$。证明：向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 的秩等于 $\operatorname{rank}A$。

证明 记 $\operatorname{rank}A=r$，A 的行向量组为 $\gamma_1,\cdots,\gamma_k$，其中 $\gamma_j=(a_{j1}\ \cdots\ a_{jm})(j=1,\cdots,k)$ 为第 j 行的行向量。不失一般性，可设 A 的前 r 个行向量线性无关，而当 $r+1\le j\le n$ 时，

$$\gamma_j=c_{j1}\gamma_1+\cdots+c_{jr}\gamma_r.$$

- 一方面，注意到当 $r+1\le j\le k$ 时，直接验证得 $\beta_j=c_{j1}\beta_1+\cdots+c_{jr}\beta_r$，即 $\beta_{j+1},\cdots,\beta_k$ 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性表出，因此

$$\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_k\}\le\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}\le r.$$

- 另一方面，可以证明 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关。事实上，若 $l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r=0$，则

$$l_1(a_{11}\alpha_1+\cdots+a_{1m}\alpha_m)+\cdots+l_r(a_{r1}\alpha_1+\cdots+a_{rm}\alpha_m)=0.$$

  进一步整理为

$$(l_1a_{11}+\cdots+l_ra_{r1})\alpha_1+\cdots+(l_1a_{1m}+\cdots+l_ra_{rm})\alpha_m=0.$$

  而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，因此

$$\begin{cases}a_{11}l_1+\cdots+\ a_{r1}l_r=0\\ \quad\cdots\\ a_{1m}l_1+\cdots+a_{rm}l_r=0\end{cases}$$

  而这个齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 r，等于未知量个数，因此这个齐次线性方程组只有零解，即由 $l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r=0$ 可以推出 $l_1=\cdots=l_r=0$，因此 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关。于是

$$\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_k\}\ge\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}=r.$$

综上所述，$\operatorname{rank}\{\beta_1,\cdots,\beta_k\}=r=\operatorname{rank}A$。 □

注 1 用矩阵乘法的语言可以把后半部分的证明改写为：若 $l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r=0$，则

$$\begin{aligned}(\beta_1\ \cdots\ \beta_r)\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_r\end{pmatrix}=0 &\Longrightarrow (\alpha_1\ \cdots\ \alpha_m)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{r1}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{1m}&\cdots&a_{rm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_r\end{pmatrix}=0\\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{r1}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{1m}&\cdots&a_{rm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_r\end{pmatrix}=0.\end{aligned}$$

进而推出 $l_1=\cdots=l_r=0$。

注 2 用矩阵的观点来看：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_k$ 是 K^n 中的向量。将 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 拼成 $n\times m$ 矩阵 B，将 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 拼成 $n\times k$ 矩阵，将系数矩阵 $A=(a_{ij})_{k\times m}$ 的转置（是 $m\times k$ 矩阵）记为 C，则此题可以改写成如下关于矩阵的结论：对 $n\times m$ 矩阵 B 和 $m\times k$ 矩阵 C，若 B 是列满秩矩阵，则

$$\operatorname{rank} BC=\operatorname{rank} C.$$

注 3 用线性映射的观点来看：记 $U=\operatorname{span}\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m\rangle, V=\operatorname{span}\langle\beta_1,\cdots,\beta_k\rangle$。取 K^k 的一组基 $\gamma_1,\cdots,\gamma_k$。定义线性映射：$f:K^k\to U, f(\gamma_j)=\beta_j(j=1,\cdots,k)$，则成立矩阵的等式

$$f\cdot(\gamma_1\ \cdots\ \gamma_k)=(\beta_1\ \cdots\ \beta_k)=(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_m)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{k1}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{1m}&\cdots&a_{km}\end{pmatrix},$$

即矩阵 $C=A^T$ 是线性映射 f 在 K^k 的基 $\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 以及 U 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 下的矩阵，并且任何线性映射在（两组）基下都有如上的矩阵表示。又注意到 V 是这个线性映射的像空间 (image)，通常记为 $\operatorname{im} f$，因此本题结论说明

$$\dim\operatorname{im} f=\operatorname{rank} C,$$

即任何线性映射的像空间的维数都等于其在（两组）基下的矩阵的秩。

11. 证明：对矩阵 A，若 $\operatorname{rank} A=r$，则其任意 r 个线性无关行与 r 个线性无关列交叉处元素形成的子式一定非 0。再问：如果将条件换成“$\operatorname{rank} A>r$”，结论还成立吗?

证明 不妨设 A 的前 r 行以及前 r 列线性无关（为什么?）。于是 A 可记为

$$A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\ A_3&A_4\end{pmatrix}.$$

其中 A_1 是 $r\times r$ 矩阵。因为 $\operatorname{rank} A=r$，而 A 的前 r 列线性无关，因此它们是 A 的列向量组的一个极大线性无关组。于是 $\begin{pmatrix}A_2\\ A_4\end{pmatrix}$ 的列向量组可由 $\begin{pmatrix}A_1\\ A_3\end{pmatrix}$ 的列向量组线性表出。这说明 A_2 的列向量组可由 A_1 的列向量组线性表出。再由 $(A_1\ A_2)$ 的行向量组线性无关，所以

$$\operatorname{rank} A_1=\operatorname{rank}(A_1\ A_2)=r,$$

因此 $|A_1|\neq 0$。

当 $\operatorname{rank} A>r$ 时，结论不一定成立，例如，考虑矩阵

$$\begin{pmatrix}0&1\\ 1&0\end{pmatrix}$$

的第一行和第一列。 □

12. 设有两个线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\cdots+\ a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+\ a_{22}x_2+\cdots+\ a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1}$$