§ 数学外卖线性代数讲座

刘欣晨、郝昱翔

2024 年 11 月 17 日

1 矩阵的初等变换与线性方程组

1. **矩阵与线性方程组**之间有着妙不可言的联系. 解一个线性方程组可以转化成去解方程

$$AX = \beta$$

其中 A 代表系数矩阵，X 是未知元向量，β 代表常数项列向量.

2. 对 $m \times n$ 矩阵，以下三种运算称为行初等变换.

   (a) 交换两行位置.

   (b) 某一行乘以非零数 λ.

   (c) 某一行乘以 λ 倍加到**另**一行上.

   类似地有列初等变换. 这两类初等变换统称为<u>初等变换</u>.

   定义 1.1. *由单位矩阵 I_n 出发经过一次初等变换得到的 n 阶方阵被称为<u>初等方阵</u>. 用 $P_{ij}^n, P_i^n(\lambda), P^n(i,\lambda,j)$ 表示.*

   定理 1.1. *设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 则*
   $$P_{ij}^m A, P_i^m(A), P^m(i,\lambda,j)A$$
   分别是 A 经过一次行初等变换得到的矩阵.

   类似地右乘可以得到列初等变换得到的初等矩阵.

   注 1.1. *初等变换对分块矩阵有类似结果成立，只需把初等矩阵中的元素 1 换为对应阶数的 $\lambda \cdot I_m$*

   定义 1.2. *若矩阵 A 经过有限次<u>行初等变换</u> 变为矩阵 B，则称 A<u>行等价于</u>B. 类似可以定义<u>列等价</u>. 如果矩阵 A 经过有限次<u>行/列初等变换</u> 可以变为 B，则称 A<u>等价</u> 或<u>相抵</u> 于 B.*

   定理 1.2. *上述 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 上的关系均为等价关系.*

3. 一定可以用初等变换，把任何一个矩阵 A 变成 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 的形状，这种形状被称为 A 的**等价标准形**，把其中 I_r 的阶数定义为矩阵 A 的秩.

4. 设 A 为 n 阶方阵且 $|A| = 0$. 考察非齐次线性方程组 $AX = \beta$, 其中 β 是 n 维向量. 记 D_j 是将 $|A|$ 中第 j 列替换为 β 后得到的行列式，且 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 中至少有一个不等于 0，证明该方程组无解.

2 向量组的线性相关性与矩阵的秩

线性相关与线性无关是线性代数中最核心的定义. 可以说，其他一切概念与命题都是围绕此展开的. 涉及线性相关/无关的证明问题，往往直接从定义出发.

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，且

$$\begin{cases} \beta_1 & = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 & = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \\ & \cdots \\ \beta_n & = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

证明：向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

注 2.1. 题中条件也等价于如下矩阵等式：

$$(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. 证明：两个向量组等价的充分必要条件是：它们的秩相等且其中一个向量组可以由另一个向量组线性表出.

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是一组线性无关的向量，若向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 可用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 表出如下：

$$\begin{cases} \beta_1 & = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m \\ \beta_2 & = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m \\ & \cdots \\ \beta_n & = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nm}\alpha_m \end{cases}$$

记系数矩阵为 $A = (a_{ij})_{k\times m}$. 证明：向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 的秩等于 $rank\ A$.

注 2.2. 从矩阵的观点看，它表明如果 B 列满秩，那么

$$rank\ BC = rank\ C$$

从线性映射的观点看，它表明任何线性映射的像空间的维数都等于其在（两组）基下的矩阵的秩.

4. 证明:对 n 阶矩阵 A 及向量 α, 若存在正整数 k 使得 $A^k\alpha = 0$ 但 $A^{k-1}\alpha \neq 0$, 则向量组 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

5. 求证：$r\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$.

6. 设 A 是 n 阶矩阵，求证：$r(A) + r(I_n + A) \geq n$.

7. (利用线性方程组的解空间维数公式讨论矩阵的秩) 设 A 是 $m \times n$ 阶实矩阵，求证：$r(A'A) = r(AA') = r(A)$.

8. (Frobenius 不等式) 设 $A_{m\times n}, B_{n\times t}, C_{t\times s}$，则

$$r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$$

9. (Sylvester 不等式) 设 $A_{m\times n}, C_{n\times s}$，则

$$r(AB) \geq r(A) + r(C) - n$$

10. 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 适合条件：

$$|a_{ij}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$$

则称 A 为严格对角占优阵. 求证：严格对角占优阵必为满秩阵. 若上述条件改为

$$a_{ij} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$$

求证：$|A| > 0$