矩阵部分答案

8、 必要性显然，下证充分性.

令 $e_1=(1,0,\cdots,0)^T$，$e_2=(0,1,\cdots,0)^T$，$\cdots$，$e_n=(0,0,\cdots,1)^T$

设 $A=(a_{ij})$，则 $e_i^TAe_j=a_{ij}$

$\therefore 0=e_i^TAe_i=a_{ii}$，$0=(e_i+e_j)^TA(e_i+e_j)=a_{ij}+a_{ji}$

又 $A=A^T$ $\therefore a_{ij}=a_{ji}$ 综上 $A=0$

9. (1) $AB=E \Rightarrow |A||B|=1$ $\therefore |B|\neq 0, |A|\neq 0$，$\therefore A$可逆，$B$可逆.

(2) $A=(1,1)$，$B=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$

$AB=E$，$BA\neq E$

(3) $(A-E)(B-E)=E \Rightarrow (B-E)(A-E)=E$

$\therefore AB=B+A=BA$

10、(1) $(A-E)(A+E)=0$ 若$(A+E)$可逆，则 $A-E=0$，$A=E$ 矛盾

(2) $(A-E)(B-E)=E \Rightarrow (A-E)^{-1}=2B-E$

11、设 $C=AB$，记 $C=(c_{ij})$，$A=(a_{ij})$ $B=(b_{ij})$

设C的第i行为0

则 $\begin{cases} a_{i1}b_{11}+\cdots+a_{in}b_{n1}=0 \\ a_{i1}b_{12}+\cdots+a_{in}b_{n2}=0 \\ \vdots \\ a_{i1}b_{1n}+\cdots+a_{in}b_{nn}=0 \end{cases}$

$\Rightarrow a_{i1}(b_{11}+\cdots+b_{1n})+a_{i2}(b_{21}+\cdots+b_{2n})+\cdots+a_{in}(b_{n1}+\cdots+b_{nn})=0$

$\because A,B$元素非负 $\therefore \begin{cases} a_{i1}(b_{11}+\cdots+b_{1n})=0 \\ a_{i2}(b_{21}+\cdots+b_{2n})=0 \\ \vdots \\ a_{in}(b_{n1}+\cdots+b_{nn})=0 \end{cases}$

则或：$(a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0)$ 或存在k，$b_{k1}+\cdots+b_{kn}=0$（推出 $b_{k1}=\cdots=b_{kn}=0$）

综上 A的一行为0或B的一行为0

12. (1)

$A^n=\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(1\ 2\ -1)\right]^n=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\left[(1\ 2\ -1)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right]^{n-1}(1\ 2\ -1)=(-3)^{n-1}A$

(2)

$A^n=\left[\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}\right]^n=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}^n+n\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2^n & 3n2^{n-1}\\0 & 2^n\end{pmatrix}$

13. 设 $A=(a_{ij})$ 满足条件，设 E_{ij} 表示 (i,j) 元为 1，其它元为 0 的矩阵

则 $\forall (i \neq j)$ 有 $AE_{ij} = E_{ij}A \Rightarrow a_{ii} = a_{jj}$，$a_{ij} = 0$

综上 A 必为 kI_n

14. 由 $A^*A = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix}$ 则 $|A^*||A| = |A|^n$，若 A 可逆 则 $|A| \neq 0$

$\therefore |A^*| = |A|^{n-1}$

若 $|A| = 0$，下证 $|A^*| = 0$，如不然，则 A^* 可逆

$0 = (A^*)^{-1} \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = A$ $\therefore A$ 是 0 阵，A^* 是 0 阵，矛盾

故 $|A| = 0 \rightarrow |A^*| = 0$

综上 $|A^*| = |A|^{n-1}$