

# 大学数学能力测试 2024

同济大学数学老外卖

December 17, 2024

本测试有四不写

- 没学高数和线代者不写, 因为它难. 还没学就写指定这辈子都不想学高数和线代了.
- 高数线代没学完者不写, 因为它多. 没学完就写都不知道知识点在哪.
- 高数线代学完者不写, 因为它长. 都学完了还写他干嘛该干嘛干嘛去.
- 玩原神者不写, 不因为啥. 毕竟都玩原神了, 不能要求太高.

## 1 第一题

本题是为了解决一类 Taylor 展开式的计算问题, 进而求一些特别的极限.

### 1.1 第一小问

已知无穷次可微函数  $f(x)$  的带 Peano 余项的 Taylor 展开式为

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n),$$

可以用以下方法求函数  $g(x) = e^{f(x)}$  的 Taylor 展开式. 注意到  $g'(x) = g(x)f'(x)$ , 对等式两侧同时求  $n$  次导数, 并对等式右侧使用 Leibniz 公式. 设  $b_n$  是  $g(x)$  的 Taylor 展开式中的  $x^n$  项系数, 证明:

$$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{n} b_i a_{n-i}.$$

### 1.2 第二小问

使用第一小问中的公式, 计算函数  $f(x) = (1+x)^{1/x}$  的 Taylor 展开式的前二项, 并求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e - \frac{e}{2}x}{x^2}.$$

## 2 第二题

本题是计算算术-几何平均值. 对于  $a, b > 0$ , 记  $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$  为  $a, b$  的算术平均值,  $G(a, b) = \sqrt{ab}$  为  $a, b$  的几何平均值. 由基本不等式知  $A(a, b) \geq G(a, b)$ , 等号成立当且仅当  $a, b$ . 下面用这两种均值构造一种新的平均值.

设  $0 < a_0 \leq b_0$ . 由以下的递推公式定义数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$ :

$$\begin{cases} a_{n+1} = G(a_n, b_n), \\ b_{n+1} = A(a_n, b_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

## 2.1 第一小问

显然  $\{a_n\}$  是单调递增数列, 而  $\{b_n\}$  是单调递减数列. 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0$ . 从而说明  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  收敛于同一值. 这个值就称为  $a_0, b_0$  的算术-几何平均值, 记为  $AG(a, b)$ .

## 2.2 第二小问

Gauss 给出了用一类积分来计算算术-几何平均值的方法. 设  $I(a, b), a \leq b$  是如下定义的积分

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}}.$$

为计算这个积分. 进行换元:

$$\sin \phi = \frac{2b \sin \theta}{(a+b) + (b-a) \sin^2 \theta}.$$

证明:

$$\frac{d\phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}} = \frac{d\theta}{\sqrt{ab \sin^2 \theta + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta}},$$

并用  $I(a_0, b_0)$  表示  $AG(a_0, b_0)$ .

## 2.3 第三小问

虽然第二小问中的  $I(a, b)$  没有具体的解析式. 但是这种积分经常出现在许多计算当中. 如下图所示, 两个无限长的  $1/4$  圆柱轴线垂直相交于原点, 半径分别为  $R$  和  $r$ , 求它们相交部分的体积, 结果用  $AG$  来表示.

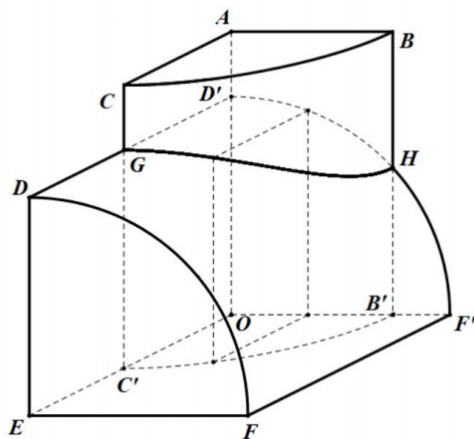


Figure 1: 第二题第三小问图

### 3 第三题

本题是通过几何方式证明一个秩不等式, 并指出秩不等式的取等条件.

记  $A, B$  为  $m \times n$  阶矩阵, 考虑秩不等式

$$\text{Rank}(A + B) \leq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B).$$

设  $V, W$  分别是  $n, m$  维向量空间, 下面也用  $A, B$ , 以及  $A + B$  代表这些矩阵对应的  $V$  到  $W$  的线性映射. 用核空间维数代替秩, 原不等式等价于

$$\dim \ker(A + B) \geq \dim \ker(A) + \dim \ker(B) - n.$$

注意到, 任取  $v \in \ker(A) \cap \ker(B)$ , 有  $Av = Bv = 0$ . 从而  $(A + B)v = 0$ , 即  $v \in \ker(A + B)$ . 于是  $\ker(A) \cap \ker(B) \subseteq \ker(A + B)$ , 故有

$$\begin{aligned} \dim \ker(A + B) &\geq \dim \ker(A) \cap \ker(B) \\ &= \dim \ker(A) + \dim \ker(B) - \dim(\ker(A) + \ker(B)) \\ &\geq \dim \ker(A) + \dim \ker(B) - n. \end{aligned}$$

容易发现等号成立当且仅当  $\ker(A + B) = \ker(A) \cap \ker(B)$  以及  $\ker(A) + \ker(B) = V$ .

于是可以如下选取  $V$  的一组基: 先选定  $v_1, v_2, \dots, v_s$  为  $\ker(A) \cap \ker(B)$  的一组基, 先将其扩充为  $\ker(A)$  一组基  $v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_r$ , 再将其扩充为  $\ker(B)$  的一组基  $v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t$ . 此时有  $r + s + t = n$ . 接下来选定  $W$  的一组基.

#### 3.1 第一小问

首先需证明:  $A$  限制在  $w_1, \dots, w_t$  上是一个可逆映射, 因此可以选取  $t$  个  $m$  维向量  $x_1, \dots, x_t$ , 使得  $A$  在这两组基下的矩阵为  $E_t$ . 同理可以选取  $r$  个  $m$  维向量  $y_1, \dots, y_r$ , 使得  $B$  在  $\{u_i\}, \{y_i\}$  这两组基下的矩阵为  $E_r$ .

#### 3.2 第二小问

使用条件  $\ker(A + B) = \ker(A) \cap \ker(B)$ , 证明: 第一小问中选取的  $x_1, \dots, x_t, y_1, \dots, y_r$  是线性无关的. 从而可以添加  $z_1, \dots, z_{m-r-t}$ , 扩充成为  $W$  维向量空间的一组基. 于是在基  $\{u_i, v_j, w_k\}$  和  $\{y_i, z_j, x_k\}$  下,  $A, B$  的矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} O & O \\ O & E_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

从而秩不等式成立的充要条件为: 存在  $m$  阶和  $n$  阶非奇异矩阵  $P, Q$ , 使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} O & O \\ O & E_t \end{bmatrix}, PBQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

并且  $r + s \leq \min\{m, n\}$ .

## 4 第四题

本题证明一个关于迹零矩阵的重要事实, 其在李代数的研究中格外重要. 记  $n \times n$  阶实矩阵空间为  $M$ , 定义  $M$  上的迹函数为

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}, A = (a_{ij}) \in M.$$

因  $\text{Tr}$  是线性的, 故使得  $\text{Tr}(A) = 0$  的矩阵  $A$  构成一个线性空间, 记为  $S$ . 下面对  $S$  进行刻画.

### 4.1 第一小问

设  $A, B \in M$ , 证明  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ . 从而任意形如  $C = AB - BA$  的矩阵  $C$  都在  $S$  中. 特别地, 设  $L$  是这些矩阵张成的子空间, 即

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i C_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, C_i = A_i B_i - B_i A_i, 1 \leq i \leq k \right\}$$

是  $S$  的一个子空间.

### 4.2 第二小问

下面求出  $L$  的一组基. 设  $E_{ij}$  是第  $(i, j)$  位置为 1, 其余位置为 0 的  $n$  阶方阵. 于是任取  $C = AB - BA, A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M$ , 有

$$\begin{aligned} C &= \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij} \right) \left( \sum_{k,l=1}^n b_{kl} E_{kl} \right) - \left( \sum_{i,j=1}^n b_{ij} E_{ij} \right) \left( \sum_{k,l=1}^n a_{kl} E_{kl} \right) \\ &= \sum_{i,l=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} \right) E_{il} - \sum_{i,l=1}^n \left( \sum_{j=1}^n b_{ij} a_{jl} \right) E_{il} \end{aligned}$$

此处注意到, 如果  $A, B$  是对称矩阵, 那么有

$$C = \sum_{i,l=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} \right) E_{il} - \sum_{i,l=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{lj} b_{ji} \right) E_{il} = \sum_{i,l=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} \right) (E_{il} - E_{li}).$$

从而  $C$  是  $E_{il} - E_{li}, 1 \leq i < l \leq n$  的线性组合. 注意到任意矩阵都能写成一个对称阵和一个反对称阵之和, 据此证明:

$$\{E_{il} - E_{li}, E_{il} + E_{li} \mid 1 \leq i < l \leq n\}$$

是  $L$  的一组基. 容易发现这也是  $S$  的一组基, 从而有  $S = L$ . 于是方阵  $C$  迹为零当且仅当存在方阵  $A, B$ , 使得

$$C = AB - BA.$$

## 5 第五题

本题是研究质点在平面和空间中的运动问题. 因此本题中的符号依照物理学的习惯. 假设质点在平面内运动, 其在  $t$  时刻的位置向量为  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ , 位置向量和  $x$  正半轴的夹角为  $\theta(t)$ . 于是质点在  $t$  时刻的速度可以表示为

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)).$$

这里在函数上方加一点表示其对  $t$  的导数, 之后加两点表示对  $t$  的二阶导数, 依此类推. 质点的加速度即为

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)).$$

质点在  $[0, t]$  时间内走过的弧长  $s(t)$  为

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(T)| dT = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(T)^2 + \dot{y}(T)^2} dT.$$

### 5.1 第一小问

考虑质点的切向加速度. 即加速度  $\mathbf{a}$  在垂直于速度  $\mathbf{v}$  的方向的投影, 即为

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v}.$$

证明:

$$|\mathbf{a}_n(t)| = |\mathbf{v}(t)|^2 \rho(t),$$

这里  $\rho(t) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{s}}$  为质点的运动轨迹在点  $(x(t), y(t))$  处的曲率. 这个等式表明, 质点在时刻  $t$  的瞬时运动即为在曲率圆上作变速圆周运动.

### 5.2 第二小问

使用第一小问的结论解决物理问题. 如图质点位于原点处, 有形状为  $y = \cos x - 1$  的光滑轨道. 现予质点一向右的初速度  $v_0$ , 使质点向前滑行. 为使质点始终不脱离轨道, 求  $v_0$  应该满足的条件.

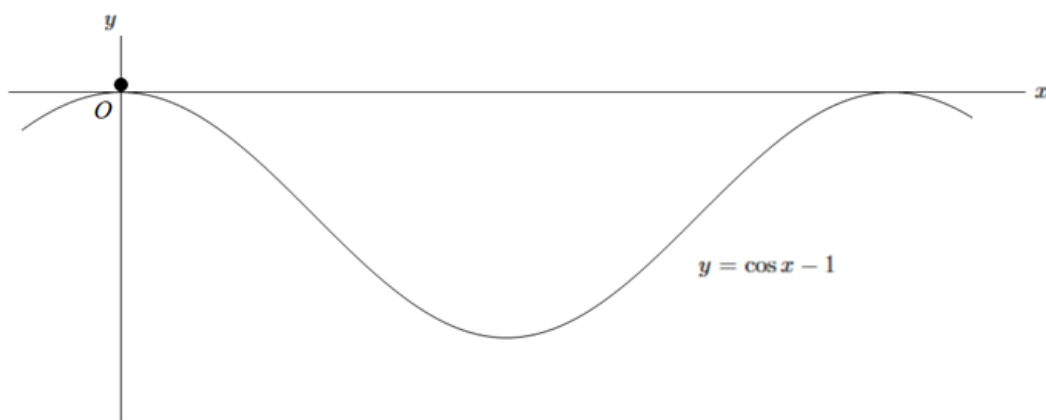


Figure 2: 第五题第二小问图

### 5.3 第三小问

现在考虑质点在空间中的运动. 试证明第一小问的结论对于空间中的运动仍然成立. 现有一垂直于地面的光滑椭圆柱内侧面, 其关于  $u, v \in \mathbb{R}$  的参数方程为

$$(x, y, z) = (a \sin u, b \cos u, v), a, b > 0.$$

一质量为  $m$  的质点位于  $(a, 0, h)$  点处. 现予质点一垂直于椭圆柱面的初速度  $\mathbf{v}_0$ , 使质点在重力的作用下沿椭圆柱面做螺旋线运动. 求质点运动轨迹  $\mathbf{r}(t)$  和椭圆柱面受到的压力  $\mathbf{F}(t)$ .

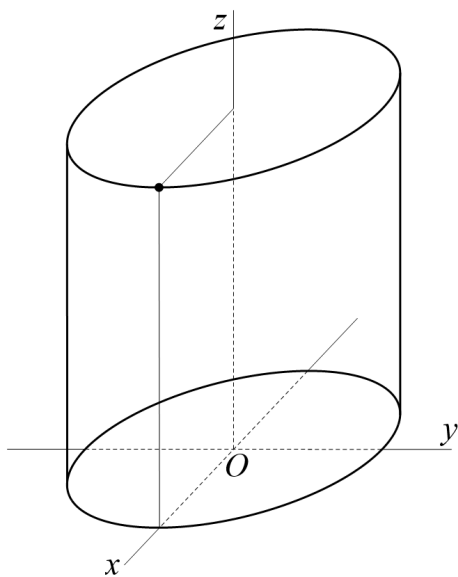


Figure 3: 第五题第三小问图

## 6 第六题

本题是求解一类矩阵的特征值, 并尝试着给出它的几何意义. 本题表明寻找矩阵的几何意义有时给予我们额外的注意力.

## 6.1 第一小问

记  $V$  是  $n$  维实线性空间, 定义  $W$  是由如下的集合生成的线性空间.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ u_1 v_2 \\ \vdots \\ u_1 v_n \\ \vdots \\ u_n v_1 \\ \vdots \\ u_n v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v \\ u_2 v \\ \vdots \\ u_n v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2} \mid u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in V \right\}.$$

将集合  $W$  中的向量记为  $u \otimes v$ , 将由  $W$  生成的子空间记为  $V \otimes V$ . 证明  $V \otimes V \cong \mathbb{R}^{n^2}$ .

## 6.2 第二小问

由第一问的结论,  $\mathbb{R}^{n^2}$  中的向量可以写成若干个  $u_i \otimes v_i$  的线性组合的形式. 设  $A$  是  $V$  上的线性变换, 定义  $V \otimes V$  上的线性变换  $T(A)$  为

$$T(A) \left( \sum_{i=1}^m u_i \otimes v_i \right) = \sum_{i=1}^m (Av_i) \otimes u_i,$$

这里  $u_i, v_i \in V, 1 \leq i \leq m$ . 给定一组基  $\{e_{ij} = e_i \otimes e_j\}_{1 \leq i, j \leq n}$ , 写出这组基下  $T(A)$  的矩阵.

## 6.3 第三小问

为求  $T(A)$  的特征值, 先计算两个例子. 当  $n = 2$  时, 设  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 此时在第二小问中取好的基下,  $T(A)$  的矩阵为

$$T(A) = \begin{pmatrix} a & c & & \\ b & d & & \\ & a & c & \\ & b & d & \end{pmatrix}.$$

证明:  $T(A)$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}, -\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ . 这里  $\lambda_1, \lambda_2$  是  $A$  的特征值.

又设  $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  是对角矩阵, 此时  $T(A)$  的矩阵为

$$T(A) = \begin{pmatrix} a_1 E_{11} & a_2 E_{21} & \cdots & a_n E_{n1} \\ a_1 E_{12} & a_2 E_{22} & \cdots & a_n E_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 E_{1n} & a_2 E_{2n} & \cdots & a_n E_{nn} \end{pmatrix} = (a_i E_{ij}),$$

这里依惯例  $E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$  代表第  $(i, j)$  位置为 1, 其余位置全为 0 的  $n$  阶方阵. 利用 Laplace 展开式分别对  $1 \sim n$  行,  $n \sim 2n$  行, 直至  $(n-1)n \sim n^2$  行展开, 计算其特征值.

## 6.4 第四小问

根据第三小问的结论猜测  $T(A)$  的特征值. 如果没有这个几何模型, 直接通过矩阵计算求  $T(A)$  的特征值, 是不容易想到的. 但是这个几何模型给了我们很好的思路. 首先容易注意到: 若  $v \in V$  是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量, 那么有

$$T(A)(v \otimes v) = (Av) \otimes v = (\lambda v) \otimes v = \lambda(v \otimes v).$$

从而  $T(A)$  一定有属于  $A$  的特征值. 类似地, 若  $v, w \in V$  分别为  $A$  的属于特征值  $\lambda, \mu$  的特征向量, 那么  $v \otimes w$  不是  $T(A)$  的特征向量, 而是  $T(A)^2$  的特征向量:

$$T(A)^2(v \otimes w) = T(A)((Aw) \otimes v) = (Av) \otimes (Aw) = \lambda\mu(v \otimes w).$$

于是我们对半单矩阵  $A$  (即  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量), 进行证明. 首先证明:  $T(A)^2$  也为半单矩阵, 从而  $T(A)^2$  的特征值为

$$\lambda_i^2, 1 \leq i \leq n,$$

以及

$$\lambda_i \lambda_j, 1 \leq i < j \leq n,$$

这里  $\lambda_i$  是  $A$  的特征值,  $1 \leq i \leq n$ . 再计算  $T(A)$  的特征值. 对非半单的矩阵, 注意到半单矩阵在  $n^2$  阶矩阵空间中是稠密的, 而行列式函数是连续函数, 从而上述结论适用于全体矩阵.

## 7 第七题

本题是利用 Abel 求和方法计算两个极限. 本题表明无穷积分的计算的某些方法有时候对无穷级数的计算也有效果. Abel 求和法也称分部求和法, 意味着它和积分运算中的分部积分法有相似之处. 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是两数列,  $B_n = \sum_{i=1}^n b_i$  是  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和,  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ . 那么有

$$S = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i (B_i - B_{i-1}) = B_n a_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_{i+1} - a_i).$$

### 7.1 第一小问

考虑  $f(x) = \sin x$ . 其在  $(1, +\infty)$  上的无穷积分是不存在的. 但是可以使用特殊的方法使其收敛. 考虑积分

$$I(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^s} dx.$$

这个积分在  $s > 0$  时是收敛的. 因此可以考虑极限  $\lim_{s \rightarrow 0^+} I(s)$ . 考虑另一积分

$$J(s) = \int_1^{+\infty} (1-s)^x \sin x dx.$$

这个积分在  $s > 0$  时同样是收敛的, 也可以考虑极限  $\lim_{s \rightarrow 0^+} J(s)$ . 下面试求这两种积分的值.

$$\begin{aligned} J(s) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N (1-s)^x \sin x dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N (1-s)^x d(-\cos x) \\ &= \cos 1(1-s) - \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \cos N(1-s)^N + \int_1^N \cos x d(1-s)^x \right) \\ &= \cos 1 + \log(1-s) \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N (1-s)^x \cos x dx \right). \end{aligned}$$



证明: 无穷积分

$$\int_1^{+\infty} (1-s)^x \cos x dx$$

收敛, 由此说明  $\lim_{s \rightarrow 0^+} J(s) = \cos 1$ .

## 7.2 第二小问

使用和第一小问同样的方法, 证明在  $s > 0$  时, 无穷积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^s} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^s} dx$$

收敛, 并且  $\lim_{s \rightarrow 0^+} I(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} J(s) = \cos 1$ .

## 7.3 第三小问

对应地, 现在考虑数列  $a_n = \sum_{k=1}^n \sin k$ . 显然  $a_n$  也不收敛. 同样可以使用特殊方法使其收敛. 考虑数列

$$I_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^s}$$

和

$$J_n(s) = \sum_{k=1}^n (1-s)^{k-1} \sin k.$$

它们在  $s > 0$  时同样是收敛的. 因此想到猜测

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(s).$$

但直接计算这两个数列是困难的, 特别是  $I_n(s)$ , 它无法使用初等解析式表达出来. 但是前两小问的计算给了我们启发: 尽管前两小问的计算中并没有求出被积函数的原函数, 但是还是使用了分部积分法完成了计算. 因此此时应该对应地使用 Abel 求和法. 这需要一点准备工作.

首先使用欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

这里  $x \in \mathbb{R}$ ,  $i$  是虚数单位, 将  $\sin n$  写成两个等比数列之和, 从而进行求和. 证明正弦等差数列求和公式:

$$\sum_{k=0}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

## 7.4 第四小问

以  $I_n(s)$  为例, 使用 Abel 求和法进行计算:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(s) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^s} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n \sin k\right)}{n^s} - \sum_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^l \sin k\right) \left(\frac{1}{(l+1)^s} - \frac{1}{l^s}\right). \end{aligned}$$

代入第三小问中的公式, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(s) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{l=1}^{n-1} \left( \frac{\cos \frac{1}{2} - \cos \left( l + \frac{1}{2} \right)}{2 \sin \frac{1}{2}} \right) \left( \frac{1}{l^s} - \frac{1}{(l+1)^s} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^s} \right) - \frac{1}{2} \csc \frac{1}{2} \left( \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\cos \left( l + \frac{1}{2} \right)}{l^s} - \sum_{l=2}^n \frac{\cos \left( l - \frac{1}{2} \right)}{l^s} \right). \end{aligned}$$

使用和差化积公式  $\cos \left( l + \frac{1}{2} \right) - \cos \left( l - \frac{1}{2} \right) = -2 \sin \frac{1}{2} \sin l$ , 上式等于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(s) &= \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \csc \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -2 \sin \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{\sin l}{l^s} - \frac{\cos \left( n + \frac{1}{2} \right)}{n^s} + \cos \frac{1}{2} \right) \\ &= \cot \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(s). \end{aligned}$$

从而得

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(s) = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}.$$

模仿上述计算, 求证

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(s) = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}.$$

## 8 第八题

本题对一个常见的矩阵方程的解进行分析. 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 常常考虑与  $A$  可交换的方阵, 即矩阵方程

$$AX - XA = 0$$

的解. 注意到这是一个线性方程, 因此所有与  $A$  可交换的方阵构成的线性空间就是这个方程的解空间. 现研究这个解空间.

### 8.1 第一小问

下面定义两种运算. 矩阵的拉直映射  $L$  是  $s \times t$  阶矩阵空间到  $st$  维列向量空间的线性映射, 定义如下

$$L(A) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1t}, a_{21}, \dots, a_{2t}, \dots, a_{s1}, \dots, a_{st})^T, A = (a_{ij}).$$

对于  $p \times q$  阶矩阵  $A$  和  $s \times t$  阶矩阵  $B$ , 定义它们的 Kronecker 积为

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2q}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \cdots & a_{pq}B \end{pmatrix}.$$

$A \otimes B$  是一个  $ps \times qt$  阶矩阵. 证明: 对  $r \times s$  阶矩阵  $A$  和  $s \times t$  阶矩阵  $B$ , 有

$$L(AB) = (A \otimes E_t)L(B) = (E_s \otimes B^T)L(A),$$

这里  $E_s, E_t$  分别是  $s, t$  阶单位阵.

## 8.2 第二小问

对方程  $AX - XA = 0$  两边同时进行拉直, 就有

$$L(AX) - L(XA) = (A \otimes E)L(X) - (E \otimes A^T)L(X) = (A \otimes E - E \otimes A^T)L(X) = 0.$$

于是矩阵方程  $AX - XA = 0$  的解空间维数就等于  $n^2 - \text{Rank}(A \otimes E - E \otimes A^T)$ . 下面尝试用  $A$  的性质来计算  $\text{Rank}(A \otimes E - E \otimes A^T)$ . 用分块矩阵的性质说明:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD),$$

这里  $A, B, C, D$  分别是  $p \times q, s \times t, q \times r, t \times u$  阶矩阵.

## 8.3 第三小问

现在可以对  $A \otimes E - E \otimes A^T$  进行相似上三角化. 设  $P, Q$  是可逆矩阵, 分别将  $A, A^T$  上三角化:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, Q^{-1}A^TQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

记这两个上三角矩阵分别为  $\Lambda, \Xi$ , 那么有

$$(P^{-1} \otimes Q^{-1})(A \otimes E - E \otimes A^T)(P \otimes Q) = \Lambda \otimes E - E \otimes \Xi.$$

证明:  $\Lambda \otimes E - E \otimes \Xi$  也是上三角矩阵, 且对角元就是  $\lambda_i - \lambda_j, 1 \leq i, j \leq n$ . 记  $D(A)$  是  $A$  两两相同的特征值的组数, 那么有估计

$$\text{Rank}(A \otimes E - E \otimes A^T) \geq n^2 - D(A).$$

也即矩阵方程  $AX - XB$  的解空间维数大于等于  $D(A)$ .

## 8.4 第四小问

证明: 第三小问的估计对半单矩阵是精准的, 即当  $A$  为半单矩阵的时上述不等式取等号. 但是对非半单的矩阵估的估计不精准. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

并选取相应的可逆矩阵  $P, Q$ , 使得  $\Lambda = \Xi = A$ . 使用第三小问的不等式估计, 得

$$\text{Rank}(A \otimes E - E \otimes A) \geq 0.$$

计算  $\text{Rank}(A \otimes E - E \otimes A)$  的真实值, 从而说明上述的估计是不准确的.

## 8.5 第五小问

用类似的方法可以得到一个经典结论: Sylvester 矩阵方程

$$AX - XB = C$$

存在唯一解的充要条件是  $A, B$  没有相同特征值. 试证明之.

## 9 第九题

本题是计算一个极限, 并运用类似的计算方法证明 Riemann-Lebesgue 引理的一个简单情况.

### 9.1 第一小问

记函数

$$\Phi(x) = \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt.$$

这个瑕积分是绝对收敛的, 并且  $\Phi(0) = 0$ . 下面叙述一种方法证明  $\Phi(x)$  在  $x = 0$  处可微. 因  $\Phi(x)$  是奇函数, 因此只需证明  $\Phi(x)$  在  $x = 0$  处右导数存在. 这等价于证明极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_{+\infty}^{1/x} \sin u \frac{1}{u} du = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$$

存在. 将上式中的积分记作  $I$ . 现将无穷积分拆分为在区间  $[x + k\pi, x + (k+1)\pi], k \in \mathbb{N}$  上区间积分的无穷和, 即

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{x+k\pi}^{x+(k+1)\pi} \frac{\sin u}{u^2} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_x^{x+\pi} \frac{\sin(u+k\pi)}{(u+k\pi)^2} du.$$

因为  $I$  是绝对可积的, 因此上述拆分是合理的. 用诱导公式, 得

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_x^{x+\pi} \sin u \frac{(-1)^k}{(u+k\pi)^2} du = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\pi} \sin u \left( \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(u+k\pi)^2} \right) du.$$

证明: 对  $k \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R}$ , 有

$$\frac{1}{(u+k\pi)^2} - \frac{1}{(u+(k+1)\pi)^2} \leq \frac{2\pi}{(u+k\pi)^2}.$$

由此说明

$$|I| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\pi} |\sin u| \left| \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(u+k\pi)^2} \right| du \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\pi} \sum_{k=0}^{[N/2]} \frac{2\pi}{(u+2k\pi)^3} du \leq \frac{\pi}{x^2}.$$

从而得证可微性, 并且  $\Phi'(0) = 0$ .

## 9.2 第二小问

上面处理的积分可以做如下变形:

$$x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du = x \int_1^{+\infty} \frac{\sin ux}{(ux)^2} d(ux) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} \sin(xu) du.$$

于是我们可以考虑更一般的情形. 设  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上绝对可积, 则有

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = 0.$$

不妨先考虑有限区间上的情形, 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是可积的, 那么

$$\int_a^b f(x) \sin(\alpha x) dx = \sum_{i=0}^N \int_{a+i\pi/\alpha}^{a+(i+1)\pi/\alpha} f(x) \sin(\alpha x) dx - \int_b^{a+(N+1)\pi/\alpha} f(x) \sin(\alpha x) dx.$$

这里  $N = [\alpha(b-a)/\pi]$ . 于是

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(\alpha x) dx \right| \leq \left| \sum_{i=0}^N \int_{a+i\pi/\alpha}^{a+(i+1)\pi/\alpha} f(x) \sin(\alpha x) dx \right| + \frac{\pi G}{\alpha}.$$

这里  $G$  是  $|f(x)|$  在  $[a, b]$  上的上界 (因为  $f(x)$  是可积的, 因而有界). 上式中的第一项有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^N \int_{a+i\pi/\alpha}^{a+(i+1)\pi/\alpha} f(x) \sin(\alpha x) dx \right| &= \left| \int_a^{a+\pi/\alpha} \sin(\alpha x) \sum_{i=1}^N \left( (-1)^i f\left(x + \frac{i\pi}{\alpha}\right) \right) dx \right| \\ &\leq \int_a^{a+\pi/\alpha} |\sin(\alpha x)| \left| \sum_{i=1}^N \left( (-1)^i f\left(x + \frac{i\pi}{\alpha}\right) \right) \right| dx \\ &\leq \frac{\pi}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^{[N/2]} \omega_{2i} + G \right). \end{aligned}$$

这里

$$\omega_i = \sup \left\{ f(x) \mid a + \frac{i\pi}{\alpha} \leq x \leq a + \frac{(i+1)\pi}{\alpha} \right\} - \inf \left\{ f(x) \mid a + \frac{i\pi}{\alpha} \leq x \leq a + \frac{(i+1)\pi}{\alpha} \right\},$$

是  $f(x)$  的振幅. 使用  $f(x)$  的可积性证明:  $\sum_{i=1}^{[N/2]} \omega_{2i}$  有与  $\alpha$  无关的上界, 从而上式极限为 0. 这就是 (Riemann 可积情形的) Riemann-Lebesgue 引理

## 9.3 第三小问

下面证明无穷积分的 Riemann-Lebesgue 引理. 由  $f(x)$  绝对可积, 知对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $X > 0$ , 使得

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx \right| \leq \int_A^{+\infty} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

用有限区间的 Riemann-Lebesgue 引理完成证明.