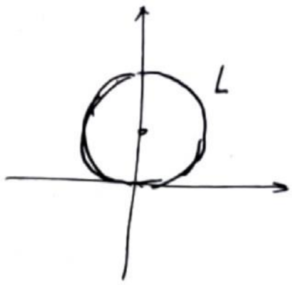
例1. 求 $I=\oint_L\left((x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)ds$. $L: x^2+(y-1)^2=1$.

$\hookrightarrow x^2+y^2=2y$



$$I=\underbrace{\oint_L x\sqrt{x^2+y^2}\,ds}_{\text{由对称性，值为0.}}+\oint_L\left(\sqrt{y}\cdot\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{}+\underbrace{x^2+y^2}_{=2y}\right)ds.$$

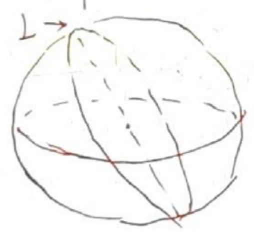
$$=0+\oint_L(2+\sqrt{2})\,y\,ds$$

令 $x=\cos\theta$, $y=1+\sin\theta$

$$=\int_0^{2\pi}(2+\sqrt{2})(1+\sin\theta)\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=(2+\sqrt{2})\cdot 2\pi.\quad\square$$

例2. $\boxed{L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ x+y+z=0.\end{cases}}$, 求 $\int_L(3x^2-y^2-z^2)\,ds$

标准的轮换对称形.



$$\boxed{\begin{aligned}\int_L(3x^2-y^2-z^2)\,ds&=\int_L(3y^2-z^2-x^2)\,ds\\&=\int_L(3z^2-x^2-y^2)\,ds\end{aligned}}$$

$$\therefore\int_L(3x^2-y^2-z^2)\,ds=\frac{1}{3}\int_L(3x^2-y^2-z^2+3y^2-z^2-x^2+3z^2-x^2-y^2)\,ds$$

$$=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)\,ds=3\int_L ds=3\cdot 2\pi 3=18\pi.\quad\square$$

例3. $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2y$, 求 $\iint_\Sigma(x^2+2y^2+4z^2)\,dS$.

变形 ↓ $\bar{y}=(y-1)$

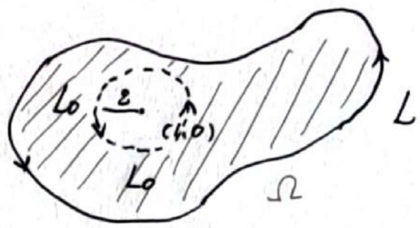
$x^2+\bar{y}^2+z^2=1$, $I=\iint_\Sigma(x^2+2\bar{y}^2+4z^2+4\bar{y}+2)\,ds$

轮换对称形!

$$=\iint_\Sigma(x^2+2\bar{y}^2+4z^2)\,ds+\underbrace{4\iint_\Sigma\bar{y}\,ds}_{=0\ (\text{对称})}+\underbrace{2\iint_\Sigma dS}_{=2\cdot4\pi}=\frac{52}{3}\pi.\quad\square$$

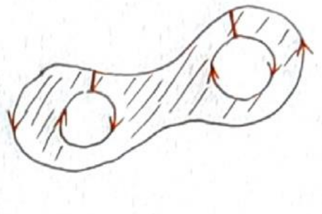
$$=\frac{1}{3}\iint_\Sigma 7(x^2+\bar{y}^2+z^2)\,dS=\frac{28}{3}\pi$$

例4. $\oint_L \dfrac{y\,dx+(1-x)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$. L 包含 $(1,0)$ 在内.



$(1,0)$ 为奇点. 挖出一个小圆盘.

L_0: $(x-1)^2+y^2=\varepsilon^2$, 逆. 包含在 L 内. (ε 足够小).



$$I=\oint_{\boxed{L-L_0}}\frac{y\,dx+(1-x)\,dy}{(x-1)^2+y^2}+\oint_{L_0}\frac{y\,dx+(1-x)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$$

Ω 的边界. Green 公式

$$=0+\oint_{L_0}\frac{y\,dx+(1-x)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$$

令 $x=1+\varepsilon\cos\theta$, $y=\varepsilon\sin\theta$

$$=\int_0^{2\pi}-1\,d\theta=-2\pi. \quad \square$$

例5. $\oint_L \dfrac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$.

(1) L 不包含也不经过原点. Green 公式. 0.

(2) L 为以原点为圆心的单位圆.

(3) L 任意包含原点闭曲线. 开挖!

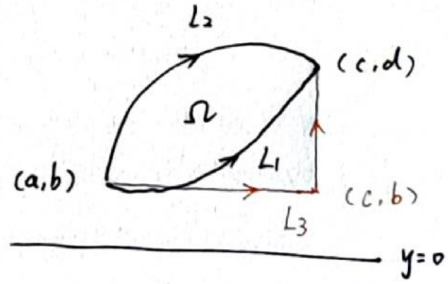
$\Big\}$ -2π.

$\square$.

例6. $f(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$, L 为上半平面内的一条 (a,b) 到 (c,d) 的曲线.

$$I=\int_L \frac{1}{y}\left(1+y^2f(xy)\right)dx+\frac{x}{y^2}\left(y^2f(xy)-1\right)dy.$$

(1) I 与 L 的选取无关.



$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\left(1+y^2f(xy)\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y^2}\left(y^2f(xy)-1\right)\right)$$

$\therefore$ I 与路径无关.

Ω 的边界为 L_1-L_2

说明 $\int_{L_1}\cdots ds=\int_{L_2}\cdots ds$ $\longleftarrow$ Green: $\int_{L_1-L_2}\cdots ds=\iint_\Omega\cdots d\sigma=0$

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

可按路径 $(a,b)\to(c,b)\to(c,d)$ 的路径 (L_3) 积出来.

或者：$I=\underbrace{\int_L \frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy}_{\parallel}+\underbrace{\int_L yf(xy)dx+xf(xy)dy}_{\parallel}$

找出原函数.

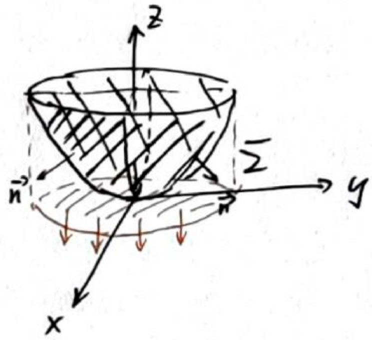
$\because\ dz(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \longrightarrow$

$$=\int_L d\left(\frac{x}{y}\right)+\int_L f(xy)$$

$$=\frac{x}{y}\Big|_{(a,b)}^{(c,d)}+f(xy)\Big|_{(a,b)}^{(c,d)}$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+f(cd)-f(ab)=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.\qquad\square$$

例7. Σ：$z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$，方向为下. 求 $\iint_\Sigma (2z+1)\,dxdy$.



投影到 xoy 平面上进行重积分.

Remark：但投影后法向与 z 正半轴相反，要加负号.

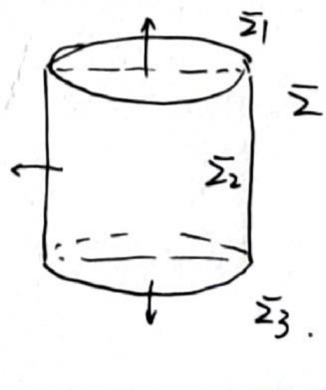
$$\iint_\Sigma (2z+1)\,dxdy=-\iint_{D_{xy}}(2x^2+2y^2+1)\,dxdy$$

极坐标换元

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(2r^2+1)\,r\,dr=-2\pi.\qquad\square$$

Remark：也可以"加盖"后用 Gauss 公式.

例8. 求 $\iint_\Sigma \frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$. Σ 为：$x^2+y^2=R^2$ & $z=\pm R\ (R>0)$ 的外侧.



用 Gauss 很复杂，故直接投影化为重积分.

但先利用对称性.

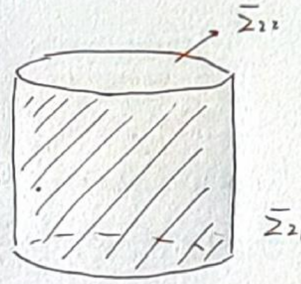
$$I = \underbrace{\int_{\Sigma_1} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,dydz}_{=0} + \int_{\Sigma_2} \sim + \underbrace{\int_{\Sigma_3} \sim}_{=0}$$ Σ1，Σ3在yoz上投影为0

$$+ \int_{\Sigma_1} \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dxdy + \underbrace{\int_{\Sigma_2} \sim}_{=0} + \int_{\Sigma_3} \sim$$ Σ2在xoy上投影为0.

此外，$\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$ 关于z偶，但Σ1，Σ3投影在xoy上法向相反，故 $\int_{\Sigma_1+\Sigma_3} \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dxdy = 0$

或：$\int_{\Sigma_1} \sim + \int_{\Sigma_3} \sim = \int_{D_{xy}} \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dxdy - \int_{D_{xy}} \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dxdy = 0$.

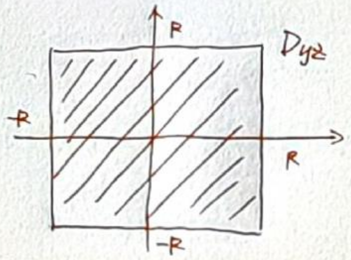
$$\therefore I = \int_{\Sigma_2} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,dydz$$



$$= 2\int_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{(\sqrt{R^2-y^2})^2+y^2+z^2}\,dydz$$

$$= \frac{1}{2}\pi^2 R.$$

∴投影



如果知道Jacobi矩阵(积分换元)的话，那么：

$$\int_{\Sigma_2} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,dydz \qquad 令 \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = t \end{cases}$$

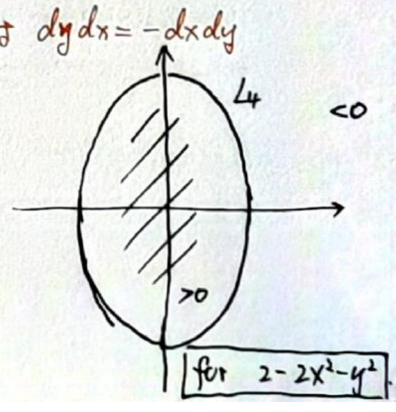
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-R}^{R} \frac{R\cos\theta}{R^2+t^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} dt \right) d\theta = \frac{1}{2}\pi^2 R. \qquad \square$$

例9. $L_1: x^2+y^2=1 \qquad L_2: x^2+y^2=2 \qquad L_3: x^2+2y^2=2 \qquad L_4: 2x^2+y^2=2$

$$I_i = \int_{L_i} \left(y+\frac{y^3}{6}\right)dx + \left(2x-\frac{x^3}{3}\right)dy.$$ 求 I_i 中最大值.

同时 $dydx = -dxdy$

知：$I = \iint_{\Omega_i} \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)dy}\,dx + \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)dx}\,dy$



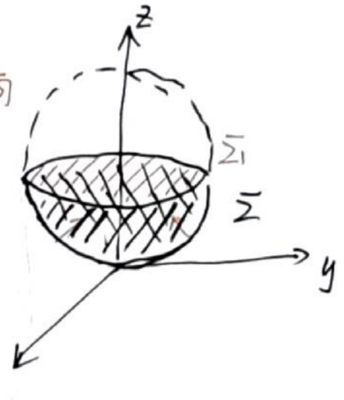
$$= \iint_{\Omega_i} \left(1-x^2-\frac{1}{2}y^2\right)dxdy = \frac{1}{2}\iint_{\Omega_i} (2-2x^2-y^2)\,dxdy.$$

而Ω_4恰好是全非负区域. 则 I_4是max. $\square$

例10. Σ: $x^2+y^2+z^2=2z$ $(0\le z\le 1)$，法向与z正半轴为钝角. 求 $\iint_\Sigma (y-2z)dydz+zdxdy$.

↓

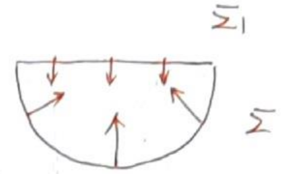
法向为内侧，补面时注意方向



令 Σ_1: $x^2+y^2\le 1$, $z=1$. 法向向下.

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(y-2z)dydz+zdxdy-\underbrace{\iint_{\Sigma_1}\sim}_{I_1}$$

↓ Gauss



$$=\iiint_V \boxed{\frac{\partial}{\partial x}(y-2z)dx}\,dydz+\boxed{\frac{\partial}{\partial z}(z)dz}\,dxdy-I_1$$

$dzdxdy=-(dxdz)dy=dx(dydz)$

$$=\iiint_V dxdydz-I_1=\frac{2}{3}\pi-I_1$$

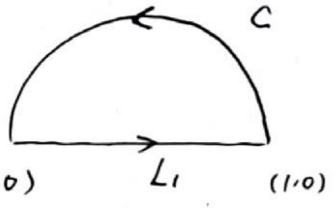
面积

$$I_1=\iint_{\Sigma_1}(y-2z)\underset{0}{dydz}+\underset{1}{z}dxdy=\iint_{\Sigma_1}dxdy=-\iint_{D_{xy}}dxdy=-\pi.$$

法向向下

$\therefore$ $I=\frac{2}{3}\pi+\pi=\frac{5}{3}\pi$. □

例11. 求 $\int_C (e^x\sin 2y-y)dx+(2e^x\cos 2y-1)dy$. C为 $x^2+y^2=1$ 中从 $(1,0)\to(-1,0)$ 的上半段.



令 L_1: $(-1,0)\to(1,0)$ 的线段.

$$I=\int_{C+L_1}\sim-\int_{L_1}(e^x\underset{0}{\sin 2y}-\underset{0}{y})dx+(2e^x\cos 2y-1)\underset{0}{dy}$$

$$=\iint_\Omega dxdy-0=\frac{\pi}{2}.$$ □

例12. 求 $\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$. 其中 Σ 为: $\{(x,y,z): x,y,z\ge 0,\ x+y+z=1\}$. 法向为(1,1,1).

仅一个面，用Gauss不再方便.

可以分别计算 $\iint_\Sigma xdydz$ ；将其投影于 yoz … 上转化为重积分. 可得结果.

但利用物理的通量 / i.e. 第二类曲面积分的意义，便很方便.

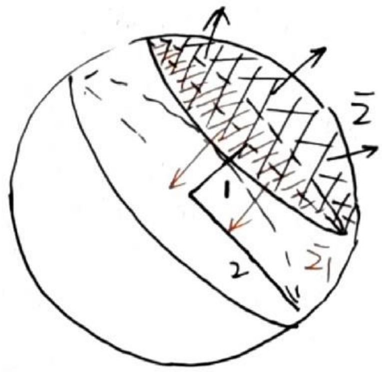
$$\iint_\Sigma x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint_\Sigma \underset{(P,Q,R)}{\vec{F}} \cdot \underset{\text{单位法向}}{\vec{n}}\, d\sigma$$

单位法向 — 当在一个面上时此方法便利 因此此时法向不会变.

$$= \iint_\Sigma (x,y,z)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right) d\sigma$$

$$= \frac{1}{\sqrt3}\underbrace{\iint_\Sigma d\sigma}_{\Sigma\text{面积}} = \frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{2} = \frac12. \quad \square$$

例13. 求 $\iint_\Sigma x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$，其中 Σ：$x^2+y^2+z^2=4$ $(x+y+z\geq\sqrt3)$ 的上表面.



补上 Σ_1：$\{(x,y,z)\mid x+y+z=\sqrt3,\ x^2+y^2+z^2\leq4\}$

法向：$\left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right)$.

$$\therefore\ I = 3\iiint_V d\sigma - \iint_{\Sigma_1} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

球冠体积 可重积分得到.

用例12方法，投影也比较复杂.

$$= 3\cdot\frac53\pi - \iint_{\Sigma_1}(x,y,z)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right)d\sigma$$

$$= 5\pi + \underbrace{\iint_{\Sigma_1} d\sigma}_{\Sigma_1\text{面积}} = 5\pi + 3\pi = 8\pi \quad \square.$$