“数学外卖”高数组春季期末讲座: 重积分、曲线曲面积分

章翔　戴云舒

2025 年 6 月 22 日

例 1. 计算 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 \sqrt{e^{2x}-y^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^e \mathrm{d}y\int_{\ln y}^1 \sqrt{e^{2x}-y^2}\,\mathrm{d}x$.

例 2. 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a (a>0)$ 所围成的闭区域.

例 3. 计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \frac{x}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$.

例 4. 计算 $\iint\limits_D e^{\frac{x}{x+y}}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1-x, y\le x\}$.

例 5. (高数 A) 计算 $\iint\limits_D x^2y^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$，直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

例 6. 设 $D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1, x^3\le y\le 1\}$，$D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, x^3\le y\le 1\}$，则

$$\iint\limits_D (x^3\sin y+y^3\cos x)\,\mathrm{d}\sigma=$$

A. $2\iint_{D_1} y^3\cos x\ \mathrm{d}\sigma$

B. $2\iint_{D_1} x^3\sin y\ \mathrm{d}\sigma$

C. $4\iint_{D_1} (x^3\sin y+y^3\cos x)\ \mathrm{d}\sigma$

D. 0

例 7. 求三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$，其中 Ω 是单位半球域 $x^2+y^2+z^2\le 1$（$z\ge 0$）(用尽可能多的方法）.

例 8. 求 $I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\ \mathrm{d}v$，其中 Ω 由 $z=1$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ 围成.

例 9. 计算重积分 $I=\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$，其中 Ω 是集合 $x^2+y^2+z^2\le z$ 与 $x^2+y^2\le z^2$ 的公共部分.

例 10. 计算 $I=\oint_L\left[(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right]\mathrm{d}s$，其中 $L:x^2+(y-1)^2=1$.

例 11. 设 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ x+y+z=0\end{cases}$，计算 $\int_L(3x^2-y^2-z^2)\,\mathrm{d}s$.

例 12. 设球面 Σ 方程为 $x^2+y^2+z^2=2y$，求曲面积分 $\iint_\Sigma(x^2+2y^2+4z^2)\,\mathrm{d}S$

例 13. 计算 $\oint_L\dfrac{y\ \mathrm{d}x+(1-x)\ \mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 为任意包围点 $(1,0)$ 的封闭曲线.

例 14. 计算 $\oint_L\dfrac{(x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 分别为：

1. 不包围也不通过原点的闭曲线；

2. 以原点为中心的单位圆（正向）；

3. 包围原点的任意正向闭曲线.

例 15. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\,\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\,\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关； (2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

例 16. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma(2z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma:z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$，方向取下侧.

例 17. 计算 $\iint_\Sigma\dfrac{x\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 由 $x^2+y^2=R^2$ 及 $z=\pm R(R>0)$ 围成（外侧）.

例 18. 设四条逆时针曲线 $L_1:x^2+y^2=1$, $L_2:x^2+y^2=2$, $L_3:x^2+2y^2=2$, $L_4:2x^2+y^2=2$，记

$$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^2}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y\quad(i=1,2,3,4)$$

则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$ __ （填 I_1,I_2,I_3 或 I_4）.

例 19. 计算 $\iint_\Sigma(y-2z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=2z\ (0\le z\le 1)$，法向量与 z 轴正向夹角为锐角.

例 20. 计算曲线积分 $\int_C(e^x\sin 2y-y)\,\mathrm{d}x+(2e^x\cos 2y-1)\,\mathrm{d}y$, 其中 C 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 从 $(1,0)$ 到 $(-1,0)$ 的上半圆周.

例 21. 计算 $\iint_\Sigma x\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分，法向量与 $(1,1,1)$ 同向.

例 22. 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=4\ (x+y+z\ge\sqrt{3})$ 上侧，求 $I=\iint_\Sigma x\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.