知识点串讲

一、~~向量理论~~ Chapter 8. 向量代数与空间解析几何 （另外包含多中考点）

1、方向角：非零向量与坐标轴的夹角 (α, β, γ)

方向余弦：…

公式：$r = |r|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|r|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|r|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|r|}$$

2. 向量在轴上的投影

Def. 点O及单位 $\vec{e}$ 确定u轴（一条直线），给定向量 $\vec{r}$，作 $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ ~~，OM在u轴上，从左边OM的投影在u轴的投影~~

取 M' 于u轴上，使得 $MM' \perp \vec{e}$，则 $\overrightarrow{OM'} = \lambda\vec{e}$，

称数λ为向量r在u轴上的投影

eg. 坐标轴：$(a = (a_x, a_y, a_z))$

$$a_x = Prj_x a, \quad a_y = Prj_y(a), \quad a_z = Prj_z a.$$

thm 1. $Prj_u a = |a| \cos\varphi$

2. $Prj_u(a+b) = Prj_u a + Prj_u b$

3. $Prj_u(\lambda a) = \lambda Prj_u a$.

3. ~~向量积的坐标表示~~ 两向量夹角公式，$(\vec{a}, \vec{b}$ 非零$)$ $\quad a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

4. 向量的向量积

Def. $c = a \times b$, $\quad |c| = |a||b|\sin\theta$ $\quad$ ~~a,b,c 构成右~~

$c \perp a$, $c \perp b$, a,b,c 构成右手系 $\quad \left(\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \geq 0 \right)$

thm 1. $a \times b = -b \times a$. $\quad (\Rightarrow a \times a = 0)$

2. $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

3. $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$

thm $\quad a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$. （形式上便于记忆）

~~5. 混合积~~ * thm $\quad (a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

*7. 混合积、Def $(a\times b)\cdot c = [abc]$

thm $[abc] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

几何意义. a.b.c 张成的平行六面体的有向体积

二、平面与直线 （利用向量公式研究空间中的几何对象）

1、平面的方程：

① 点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

② 一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

法向量：(A,B,C).（法义）

③ 截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

2、~~直线的一般形式~~ 直线的方程：

① 一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ （$(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$）.

$(m,n,p$，方向向量$)$

② ~~标准~~ 对称式：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ （若 m,n,p 中存在1~2个0，则参见~）

③ 参数方程：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

3、夹角的计算：

平面与平面、平面与直线、直线与直线：计算 n_1 与 n_2 的夹角

4. 距离的计算：

~~法1： $d=\frac{|\vec{P_0P_1}\cdot n|}{|n|}$~~ ~~平面与点、平面与直线、直线与直线~~ (

法2：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ （平面与点）

$\frac{|\vec{M_0M}\times(m,n,p)|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ （点到直线）

$\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & m_1 & m_2 \\ y_1-y_2 & n_1 & n_2 \\ z_1-z_2 & p_1 & p_2 \end{vmatrix}}{|(m_1,n_1,p_1)\times(m_2,n_2,p_2)|}$ （直线与直线）

三、曲面与曲线：

1. 方程：　　（复习一下第九章的相关概念）　③ 平面为曲面（切平面 ……）直接跳过了）

① Def 曲面方程：$F(x,y,z)=0$

隐式

(1) 曲面 S 上任一点满足方程.

(2) 不在曲面 S 上的点不满足方程.

*(3) 正则性条件.（不做作：曲面的定义，隐函数定理）. $\forall (x,y,z)\in S$　$\nabla F(x,y,z)\neq 0$ → 法向量

Def 曲线方程　C：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

(1) 在 …

(2) 不在 …

直接讲法向量与切向量

*(3) 正则性条件）　$\forall (x,y,z)\in C$　$\nabla F(x,y,z)\times \nabla G(x,y,z)\neq 0$ → 切向量

（正则性条件到下一章再讨论）

参数方程：$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$ → 法向量　　$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ → 切向量

2. 球面方程：

(1) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.　标准方程.

(2) $x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$　一般方程

3. 旋转曲面

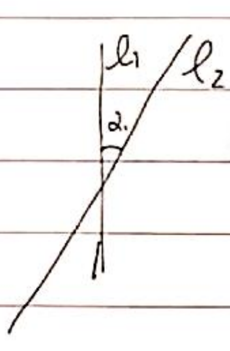
(1) Def. 旋转轴，母线：

eg. 以 z 轴为旋转轴：

$f(y,z)=0 \rightarrow f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$

(2) 圆锥面：

顶点、半顶角



(3) 旋转曲面

单双叶

4. 柱面　　（自己看）

Def 准线 母线

Def 圆柱面

椭圆柱面

5. 二次曲面

1. 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$

2. 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

3. 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

4. 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

5. 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

6. 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ (马鞍面)

6. 投影

(会到坐标平面的投影方程，方法：消元法)

Chapter 9. (理论部分多积累一些反例)

一.基础知识

1. $\mathbb{R}^2$ 的拓扑讨论.

(1) (~~邻域~~) δ 邻域

$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$.

$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$

$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}$

$E\subset\mathbb{R}^2$. 讨论与E有关的 ~~...~~ 点

(2) 内点： $\exists\ \delta>0, s.t.\ U(P,\delta)\subset E$

(3) 外点： $\exists\ \delta>0, s.t.\ U(P,\delta)\cap E=\phi$

(4) 边界点： $\forall\ \delta>0, s.t.\ U(P,\delta)\cap E\neq\phi,\ U(P,\delta)\cap E^c\neq\phi$ (∂E)

(5) 聚点： $\forall\ \delta>0, s.t.\ \mathring{U}(P,\delta)\cap E\neq\phi$.

Rmk: 聚点本身可以属于E也可以不属于E

(6) 开集： ~~...~~ E的点都是内点

(7) 闭集： $\partial E\subset E$

(8) 区域： 开集E内任何两点可用折线连接

(9) 闭区域： E为区域， $E\cup\partial E$ 为闭区域

(10) 有界集 $\exists\ r>0,\ E\subset U(O,r)$

(11) 无界集： 不是有界集…

* n维空间不讨论

二

2. 多元函数相关概念

(1) ~~函数~~ Def：定义域，值域，图像，区域 ~~(类比单元)~~ (自己看)

(2) 极限　对 ~~聚点~~ D内聚点的函数定义极限 (与单元区别同)

* thm. 海涅归结原理 (自己看)

从不同的路径趋近方式，极限应当相同

(全算例例题一下)

(3) 连续性：(类比单元) (对D内的聚点讨论)

Def 间断点：对于D的聚点讨论

(4). 有界闭集的函数：

① 最值，与最值

② 介值

③ 一致连续性定理

三. 微分学讨论

1. 偏导数

记号：$\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, z_y, f_y　$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\ \ldots\right)$

~~(自己看)~~ (具体情况不说了，自己看)

高阶偏导数

Def：$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}$　(注意顺序)

thm：在区域D上，f_{xy}, f_{yx} 连续 $\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$

2. 全微分：(类比一阶)　(对内点讨论)

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$

thm 可微 $\Rightarrow$ 偏导存在：$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$　(必要条件)

thm. 连续可导 $\Rightarrow$ 可微　(充分条件)

thm. $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

\+ (近似计算) (自己看)

thm (复合函数求导法则) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$ …

thm 全微分形式不变性 $\left(dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right.$

3. 隐函数定理

(1) 一元情况：$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内 C^1.

$F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

则 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ 　　在 (x_0,y_0) 附近 $y=f(x)$

...

(2) 二元情况：$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$ 　在 ... 类似 $(\neq 0)$

$u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$

条件极值 C^1

求 $f(x,y)$ 的极值

满足 $\varphi(x,y)=0$ (约束条件)

~~$L(x,y)$ ...~~

$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$\begin{cases} \nabla L(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$ (λ 拉格朗日乘子)

(自己看)

4. 向量值函数 (自己看)

Def $r=f(t)$ .... (自己看)

$f'(t)$, $\frac{dr}{dt}$ ...

$\frac{d}{dt}u\cdot v = u'\cdot v + v'\cdot u$

$\frac{d}{dt}u\times v = u'\times v + u\times v'$

$\frac{d}{dt}u(\varphi(t)) = \varphi'(t)\,u'(\varphi(t))$ ...

5. 方向导数与梯度

Def $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$ (用一下 方向导数)

thm $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$

Def $\mathrm{grad} f = f_x i + f_y j$

∇f 　(Nabla 算子)

thm: (增长最快的方向)

三、极值问题

Def ... (一般对于内点，邻域，条件极值则不然)

thm (一阶必要). $\nabla f=0$

thm (二阶充分) $\det(\nabla^2 f)>0$, ($f_{xx}>0$ 极小, $f_{xx}<0$ 极大)

thm (二阶必要) $\det(\nabla^2 f)\geq 0$