期末讲座一：解析几何、微分学与级数

王衡宇　赵思铭　何山　张誉翔　薛冰

2025 年 6 月 21 日

第一部分　解析几何

例 1. 若曲线 $y=f(x)$ 是由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ \mathrm{e}^y+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定,则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为__________.

例 2. 直线 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}, \\ y=0 \end{cases}$ 上与点 $(2,1,-3)$ 最近的点是 (　　)

(A) $(1,0,-2)$　　(B) $\left(\dfrac{4}{5},0,-\dfrac{12}{5}\right)$　　(C) $(2,0,0)$　　(D) $\left(\dfrac{3}{2},0,-1\right)$

例 3. 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为 (　　)

(A) $x-y+z=-2$　　(B) $x+y+z=0$　　(C) $x-2y+z=-3$　　(D) $x-y-z=0$

例 4. 曲面 $z=x^2+2y^2+\dfrac{3}{4}$ 上垂直于直线 $\begin{cases} 2x-y=0 \\ y+2z=1 \end{cases}$ 的切平面方程是__________.

第二部分　微分学

例 5. 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

例 6. 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=$__________.

例 7. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是 (　　)

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to o}} \dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

例 8. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

(2) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续；

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；

(4) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“$P \Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有 (　　)

(A) (2)⇒(3)⇒(1)　　(B) (3)⇒(2)⇒(1)　　(C) (3)⇒(4)⇒(1)　　(D) (3)⇒(1)⇒(4)

例 9. 已知 $u(x,y,z)=xy^2z^3$，$\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,3,1)}=$__________.

例 10. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 (　　)

(A) 连续但偏导数不存在　　(B) 不连续但偏导数存在

(C) 连续且偏导数存在但不可微　　(D) 可微

第三部分　级数

例 11. 判断.

(1) 设级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 均收敛（发散），讨论下列级数的敛散性.

$$\sum(a_n\pm b_n)\qquad \sum a_nb_n\qquad \sum\frac{a_n}{b_n}(b_n\neq 0)$$

对于 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 是正项级数讨论同样问题.

(2) 对于级数 $\sum\max\{a_n,b_n\}$，$\sum\min\{a_n,b_n\}$，继续 (1) 中讨论.

(3) 由 $\sum(a_n+a_{n+1})$ 收敛，能否得到 $\sum a_n$ 收敛？

例 12. 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-a)^n\frac{n!}{n^n}$

例 13. 求下列幂级数的收敛域和和函数.

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n^2-1}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)!}(x-1)^n$

例 14. 将下列函数在指定点展开成幂级数.

1. $\frac{1}{x+3},\quad x=2$
2. $\ln\frac{1}{3+2x+x^2},\quad x=-1$
3. $\frac{x-1}{x+1},\quad x=1$
4. $\sin x,\quad x=\frac{\pi}{6}$

例 15.

1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,并且它在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2, & -\pi<x\leqslant 0,\\ \cos x, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$,则它的傅里叶级数在 $x=2\pi$ 处收敛于__________.

2. 已知周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，在 $(-\pi,\pi]$ 上，$f(x)=\begin{cases}0,-\pi<x\leqslant 0,\\ x,0<x\leqslant\pi,\end{cases}$，其傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中系数 $b_2=$__________.

3. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases}\cos x, 0\leqslant|x|<\frac{\pi}{2},\\ \sin x,\frac{\pi}{2}\leqslant|x|\leqslant\pi,\end{cases}$，则它的傅里叶级数在 $x=\frac{3\pi}{2}$ 处收敛于__________.

例 16. 求下列级数和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{2^n}$

例 17. 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足：$a_1 = 2$，$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$，证明：

1. $\{a_n\}$ 收敛；
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ 收敛.

例 18. 设数列 $\{a_n\}$ 的每一项都满足条件 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$，证明：

$$\sum a_n^2 \text{收敛} \iff \prod_{n=1}^{\infty} \cos a_n \text{收敛}$$

例 19. 设函数 f 在 $[1, +\infty)$ 单调递增且有极限 $f(+\infty) = A$，证明：

1. $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)]$ 收敛，并求其和.
2. 若 f 在 $(1, +\infty)$ 二阶连续可微且 $f''(x) < 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛.

例 20. 证明：

1. 若 f 是 $[1, +\infty)$ 上非负单减函数，则存在极限
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right) = A, \qquad 0 \leqslant A \leqslant f(1).$$
2. $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2} = \frac{\pi}{2}$.