级数求和

1.证明级数收敛并求其和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+2)(n^2+2n+3)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+2)(n^2+2n+3)}$$

解：

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(k^2+2)(k^2+2k+3)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(k^2+2)\cdot((k+1)^2+2)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k^2+2} - \frac{1}{(k+1)^2+2}\right] \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{(n+1)^2+2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(n+1)^2+2}\right) = \frac{1}{3}.$$

所以这个级数收敛，它的和是 $\frac{1}{3}$.

级数的敛散性

方法：

(1) 判断 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 是否趋于 0。若不趋于 0 时，发散。

(2) 判断是否是正项级数。

(a) 是正项级数。

- 比式判别法（出现阶乘!）
- 根式判别法（出现幂次）
- 比较原则（最为通用，常和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 比较）
- 积分判别法

(a) 不是正项级数。

- Leibniz（莱布尼茨）判别法—交错级数 + 单调递减趋于 0
- Dirichlet(狄利克雷) 判别法—部分和有限 + 单调递减趋于 0
- Abel（阿贝尔）判别法——单调有界 + 收敛

1. 根式判别法&比较原则

例

判别敛散性: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^n}$

解: 令 $u_n=\frac{1}{(\ln\ln n)^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\ln n}=0<1$$

由根式判别法，所给级数收敛。
另解 (比较原则): 当 $n>e^{e^2}$，则

$$0<u_n=\frac{1}{(\ln\ln n)^n}<\frac{1}{2^n}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，则所给级数收敛。

2.积分判别法

例

判别敛散性: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot(\ln\ln n)^2}$

解: 设 $f(x)=\frac{1}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^2}$,$f(x)$ 定义在 $[3,+\infty)$ 上，而

$$\int_3^{+\infty}f(x)dx=\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^2}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u^2}du=\frac{1}{\ln\ln 3}$$

则由积分判别法，原级数收敛,

3.Leibniz 判别法

例

判别敛散性: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$

解: 令

$$f(x)=x-\ln x,(x\geqslant 1),\quad f'(x)=1-\frac{1}{x}\geqslant 0$$

所以 f 单调递增，则 $\frac{1}{n-\ln n}$ 单调递减。而由 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{\ln n}{n}}=0$$

所以由 Leibniz（莱布尼茨）判别法该级数收敛。

4.Abel 判别法

例

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛。

解：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot na_n$$

此时由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛，$\frac{1}{n}$ 单调有界。

5. Dirichlet 判别法

例

判别敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^a}, a > 0$

当 $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$，则级数和等于 0。当 $x \neq 2k\pi$ 对任意的 $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sin ix &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin ix \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\cos\frac{(2i-1)x}{2} - \cos\frac{(2i+1)x}{2} \right) \\
&= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

由 $2\sin\frac{x}{2} > 0$，则

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sin ix\right| = \left|\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right| \cdot \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$

又 $a > 0, \{\frac{1}{n^a}\}$ 单调递减且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0$，由 Dirichlet(狄利克雷)判别法，级数收敛

6.

例

判别敛散性：$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{2n-\ln n}$

解：因为

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{2n-\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

所以级数发散。

拓展：

1.

例

设 $\sum u_n$ 为收敛的正项级数，证明：存在收敛的正项级数 $\sum v_n$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=+\infty.$$

即没有收敛得最慢的级数

解：构造

$$v_n=\sqrt{\sum_n^{\infty}u_k}-\sqrt{\sum_{n+1}^{\infty}u_k}$$

此时 $\sum_1^n v_i=\sqrt{\sum_1^{\infty}u_k}-\sqrt{\sum_{n+1}^{\infty}u_k}<\sqrt{\sum_1^{\infty}u_k}$，部分和有界，则 $\sum v_n$ 收敛。并且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\sum_n^{\infty}u_k}+\sqrt{\sum_{n+1}^{\infty}u_k}}=\infty.$$

2. 计算$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\ldots\ldots$的和，其中分母分别为质因数只由 3 和 5 构成的所有数

3.

先证明级数绝对收敛，经放缩：

$\left|\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\ldots\ldots\right|\le\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\ldots=\sum(n+1)\frac{1}{3^n}$收敛

然后将级数进行重排，分别计算：

$$\sum\frac{1}{3^n}、\sum\frac{1}{5^n}、\sum_i\sum_j\frac{1}{3^i5^j}$$

得原级数=$\frac{7}{8}$