幂级数求和

1.求幂级数的收敛区域：

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$

（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}\quad(a>0,b>0)$

2.求和函数

（1）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}(\frac{2+x}{2-x})^{2n}$

3.求级数的和：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$

4.求$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(2^n)^{\frac{1}{3^n}}$

幂级数展开

1.求函数在x=0处的幂级数展开式：$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$

2.应用$\frac{e^x-1}{x}$在$x=0$的幂级数展开，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$

3.利用函数得幂级数展开式求不定式极限：$\lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$

4.将$\ln x$按$\frac{x-1}{x+1}$的幂展开成幂级数

答案：

幂级数求和：

1.（1）由比试判别法，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{(n+1)^2}}{2^{n+1}}/\frac{x^{n^2}}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{2}$

极限存在当且仅当$|x|\leq 1$

故收敛半径为1，收敛区域为$[-1,1]$（边界已由极限存在自动判断）

（2）由柯西——阿达马(Cauchy-Hadamard)定理，

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n+b^n}} \\
=&\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{a^n}\frac{1}{(\frac{b}{a})^n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \\
=&\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{a}(1+(\frac{b}{a})^n)^{-\frac{1}{n}} \\
=&\frac{1}{a}\overline{\lim_{n\to\infty}}e^{\ln(1+(\frac{b}{a})^n)^{-\frac{1}{n}}} \\
=&\frac{1}{a}\overline{\lim_{n\to\infty}}e^{-\frac{1}{n}\ln(1+(\frac{b}{a})^n)} \\
=&\frac{1}{a}e^{\overline{\lim_{n\to\infty}}-\frac{\ln(1+(\frac{b}{a})^n)}{n}} \quad (1) \\
=&\frac{1}{b}e^{\overline{\lim_{n\to\infty}}-\frac{\ln(1+(\frac{a}{b})^n)}{n}} \quad (2) \quad (\text{a、b交换})
\end{aligned}$$

若$a>b$，则由(1)知极限为$\frac{1}{a}$，否则由(2)知极限为$\frac{1}{b}$，则收敛半径为$\max\{a,b\}$.考虑边界$\max\{a,b\}$，则原级数化为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+r^n}(0<r<1)$，其中通项的极限为1，故不收敛，收敛区域为$(-max\{a,b\},max\{a,b\})$（也可使用比式判别法得此结论）

故收敛半径为$R=\max\{a,b\}$，收敛区域为$(-R,R)$.

2.（1）

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n \\
=&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)^2-4(n+1)+4}{n+1}x^n \\
=&\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)x^n-4\sum_{n=2}^{\infty}x^n+4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}
\end{aligned}$$

对于第一项，由于它在收敛区域内一致收敛，故逐项求积分有

$\int_0^x\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n+1)t^n\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=2}^{\infty}t^{n+1}=\frac{x^3}{1-x}$

左右同时对x求导得$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$

第二项等比数列求和，第三项仍在收敛区间内一致收敛，故利用求导如下：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\\
=&\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\
=&\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{t^{n+1}}{n+1})]\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}t^n\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t^2}{1-t}\mathrm{d}t\\
=&-\frac{x}{2}-1-\frac{\ln|x-1|}{x}
\end{aligned}
$$

代入原式化简得$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}=\frac{1}{(1-x)^2}-1-\frac{4}{1-x}-\frac{4\ln|x-1|}{x}$，额外考虑x=0时，原级数的值为0

（2）

解 (1) 令 $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^{n+1}$，应用逐项求导，得到

$$f''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{n-1}=\frac{1}{1+t},$$

于是

$$f'(t)=\ln(1+t),\quad f(t)=\int_0^t\ln(1+t)dt=(1+t)\ln(1+t)-t,$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^n=(1+\frac{1}{t})\ln(1+t)-1,\quad t\in[-1,1]\text{。}$$

以$t=\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2$代入，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}=\frac{2(x^2+4)}{(x+2)^2}\ln\frac{2(x^2+4)}{(x-2)^2}-1,\quad x\in(-\infty,0]\text{。}$$

3.（1）

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}\\
=&\frac{1}{2}\sum_{n=1}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2n+1})\\
=&\frac{1}{2}\sum_{n=1}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}\frac{1}{2n+1}(n=k-1)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{n=1}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}(-1)^{k}\frac{1}{2k-1}\\
=&\frac{1}{2}\sum_{n=1}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

至此，可由$\arctan x$的泰勒展开直接得到答案为$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$
亦或者设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，则$S(1)-0.5$就是级数的值，利用逐项求导的方法得到$S(x)$的导数为$\frac{1}{1+x^2}$，故$S(x)=\arctan x$.
（2）设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}x^n$，则$S(1)$就是所求级数
则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)(\frac{x}{2})^n$
设$t=\frac{x}{2}$，则$S(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)t^n|_{t=\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)t^n\\
=&t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)h^{n-1}\mathrm{d}h\text{（收敛半径内一致收敛，极限积分交换）}\\
=&t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n\text{（重复逐项求积步骤）}\\
=&t\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sum_{n=1}^{\infty}t^{n+1}\\
=&t\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{t^2}{1-t}\\
=&\frac{-2t}{(t-1)^3}
\end{aligned}
$$

代入$t=\frac{1}{2}$得原级数的和为8.

（3）设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}$，则$S(1)$就是要求的级数：

$$
\begin{aligned}
S(x)=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1})\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!})\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x-1))\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xe^x)\\
=&(x+1)e^x
\end{aligned}
$$

代入$x=1$，得级数和为$2e$

4.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}=&\prod_{n=1}^{\infty}e^{\ln((2^n)^{\frac{1}{3^n}})}\\
=&e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln((2^n)^{\frac{1}{3^n}})}\\
=&e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\ln 2}\\
=&2^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}}\text{（形似3(2)的求法可求}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}\text{）}\\
=&\sqrt[4]{8}
\end{aligned}
$$

幂级数展开：

1.

$$
\begin{aligned}
&\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}\\
=&\frac{1}{4}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+2\frac{1}{(x-1)^2})\quad((\frac{1}{(x-1)^2})^{(n)}|_{x=0}=(n+1)!)\\
=&\frac{1}{4}(-\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+1)x^n)\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1-(-1)^n}{4}x^n
\end{aligned}
$$

由比式判别法可知收敛半径为1，特别考虑边界点，验证发现不收敛

故$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1-(-1)^n}{4}x^n, x\in(-1,1)$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1。$$

证 $$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{x}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!},$$

应用逐项求导，得到

$$\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!},$$

以 $x=1$ 代入，即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1。$$

3.

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\{x-x^2[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})]\}$（$\ln t$的幂级数展开，作$t=1+\frac{1}{x}$的变量替换）

$=\lim\limits_{x\to\infty}[x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}-o(\frac{1}{x})]$

$=\frac{1}{2}$

4.设$t=\frac{x-1}{x+1}$，则$x=\frac{1+t}{1-t}$

这就等价于对$\ln\frac{1+t}{1-t}=\ln 1+t-\ln 1-t$作关于$t$的幂展开

只需对$\ln 1+t1-t$高阶求导，便得到$\ln\frac{1+t}{1-t}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}t^{2n-1}$

变量代换就得到$\ln x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}(\frac{x-1}{x+1})^{2n-1}$

（用这种方式近似计算lnx收敛得更快）