

数学外卖高等数学讲座——无穷级数

蹇欣捷、邬宗圣、梁海纳、王子夫、翟周行

2025年6月14日

1 幂级数求和

收敛区域

题目 1.1. 求幂级数的收敛区域:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0)$$

和函数

题目 1.2. 求和函数:

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{2n}$$

级数的和

题目 1.3. 证明级数收敛并求其和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+2)(n^2+2n+3)}$$

题目 1.4. 求级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

题目 1.5. 求无穷乘积:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (2^n)^{\frac{1}{3^n}}$$

2 幂级数展开

题目 2.1. 求下列函数在 $x=0$ 处的幂级数展开式:

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}, \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \frac{1}{(1-x)^2}, \frac{1}{(1-x)^3}$$

题目 2.2. 应用 $\frac{e^x - 1}{x}$ 在 $x = 0$ 的幂级数展开, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

题目 2.3. 利用函数的幂级数展开式求不定式极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

题目 2.4. 将 $\ln x$ 按 $\frac{x-1}{x+1}$ 的幂展开成幂级数。

题目 2.5. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} (x \neq 0), f(0) = 0$

- 求 $f^{(n)}(0)$, 并写出 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处展开的泰勒级数。
- 这个级数在哪些点上收敛到原函数?

3 一般级数的敛散性

根式判别法 & 比较原则

题目 3.1. 判别敛散性:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^n}$$

积分判别法

题目 3.2. 判别敛散性:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot (\ln \ln n)^2}$$

Leibniz 判别法

题目 3.3. 判别敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}$$

直接判别法

题目 3.4. 判别级数敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{2n - \ln n}$$

4 拓展例题

题目 4.1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 的敛散性, 确定是绝对收敛还是条件收敛。

题目 4.2. 计算级数的和:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \cdots$$

其中分母为质因数只由 3 和 5 构成的所有正整数 (按从小到大的顺序排列)。