“数学外卖”高数组春季第五次讲座: 曲线曲面积分

黄泽昕　邬宗圣　解淑涵　王子嫣　许可

2025 年 5 月 31 日

例 1. 求曲线积分 $\int_C e^{-(x^2+y^2)}\left[\cos(2xy)\,\mathrm{d}x+\sin(2xy)\,\mathrm{d}y\right]$ 之值，其中 C 是单位圆周 $x^2+y^2=1$，方向为逆时针.

例 2. 计算 $I_1=\int_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}, I_2=\int_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$，其中 L 为

(1) 椭圆 $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$ 所围区域的正向边界;

(2) 单位圆 $x^2+y^2=1$ 所围区域的正向边界.

例 3. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，求 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s$.

例 4. 求微分方程 $\sin x\sin 2y\ \mathrm{d}x-2\cos x\cos 2y\ \mathrm{d}y=0$ 的通解.

例 5. 已知 Σ 为曲面 $4x^2+y^2+z=1$（$x\geq 0$，$y\geq 0$，$z\geq 0$）的上侧，L 为 Σ 的边界曲线，其正向与 Σ 的正法向量满足右手法则，计算曲线积分

$$I=\int_L (yz^2-\cos z)\,\mathrm{d}x+2xz^2\,\mathrm{d}y+(2xyz+x\sin z)\,\mathrm{d}z.$$

例 6. 计算曲线积分 $\int_L y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$，其中 L 是曲线

$$x^2+y^2+z^2=1,\quad x+z=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$$

从点 $(1,0,0)$ 到 $(0,0,1)$.

例 7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\,\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\,\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关;

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

例 8. 求力 $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所做的功，其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界，从 z 轴正向看去，沿顺时针方向.

例 9. 求 $\iint_{\Sigma} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+xzdzdx+yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 在 $y\geq 0$，$z\geq 0$ 两卦限内被平面 $z=0$ 和 $z=H(H>0)$ 所截下的部分的外侧.

例 10. 计算 $I=\iint_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为 $z=x^2+y^2$ 在 $z=1$ 以下的部分.

例 11. 计算 $\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所割下的部分.

例 12. $\oiint_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$，其中 Σ 是平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

例 13. $\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧.

例 14. 设 Σ 为空间立体区域 $\{(x,y,z)\mid x^2+4y^2\leq 4, 0\leq z\leq 2\}$ 表面的外侧，求曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

例 15. 计算曲面积分 $I=\oiint_{\Sigma}\dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

例 16. 设函数 $f(x)$ 连续可导，$P=Q=R=f((x^2+y^2)z)$，有向曲面 Σ_t 是圆柱体 $x^2+y^2\leq t^2, 0\leq z\leq 1$ 的表面，方向朝外. 记第二型的曲面积分

$$I_t=\iint_{\Sigma_t} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{I_t}{t^4}$.