“数学外卖”高数组重积分讲义

何山、章翔、戴云舒、王衡宇、田煜峰、吴天昊

2025 年 5 月 10 日

【例 1】计算二重积分：$I=\iint_D |x-y^2|\,dxdy$.其中，平面区域D满足$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$.

【例 2】计算$\iint_D x^2+y^2\,d\sigma$，其中D是由直线$y=x,y=x+a,y=a,y=3a(a>0)$所围成的区域.

【例 3】计算$I=\iint_D y\,dxdy$，其中D是由曲线$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$及$x$轴和$y$轴围成，其中$a>0,b>0$.

【例 4】累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r\,f(r\cos\theta\,,r\sin\theta)\,dr$等于（　）.

A.$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,dx$　　B.$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

C.$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\ dy$　　D.$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,dy$

【例 5】计算$\iint_D y\,dxdy$，其中D是由L：$\begin{cases}x=a(t-sint)\\y=a(1-cost)\end{cases}$,$(0\le t\le 2\pi)$与$x$轴围成的区域.

【例 6】计算二重积分$\iint_D x ln(y+\sqrt{1+y^2})\,dxdy$，其中$D$是曲线$y=4-x^2$，直线$y=-3x$及直线$x=1$围成的位于直线$x=1$左边的部分.

【例 7】如果设 $(D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,x^3\le y\le 1\})$，$(D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,x^3\le y\le 1\})$，则 $\iint_D (x^3\sin y+y^3\cos x)\ \mathrm{d}\sigma=$（　）.

A. $2\iint_{D_1} y^3\cos x\ \mathrm{d}\sigma$　　B. $2\iint_{D_1} x^3\sin y\ \mathrm{d}\sigma$

C. $4\iint_{D_1}(x^3\sin y+y^3\cos x)\ \mathrm{d}\sigma$　　D. 0

【例 8】已知，Ω是由$x^2+y^2=4$，$z=0$以及$z=x^2+y^2$所围成的立体。如果将$I=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv$分别化成直角坐标以及柱面坐标的三次积分时，它们分别为$I=$____________________________；以及$I=$____________________________.

【例 9】计算$I=\iiint_\Omega z(x^2+y^2)\,dv$，其中$\Omega$是由$z=x^2+y^2$与$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围成的立体.

【例 10】求球体$x^2+y^2+z^2\le a^2$和圆柱体$x^2+y^2\le ax(a>0)$的公共部分所成空间区域的体积V.

【例 11】计算积分$\iiint_\Omega(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2\,dv$，$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\le R^2$.

【例 12】计算三重积分：$I=\iiint_\Omega\frac{dx\,dy\,dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$.

其中Ω：$0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$.

【例 13】在均匀半圆形薄板下接一个宽与直径相同的长方形的均匀薄板，要求质心在圆心处，求圆半径与长方形的高之比.

【例 14】求半径为R，半顶角为a，密度为ρ_0的均匀球锥体对顶点处单位质点的引力.