重积分讲义：

要点：1. 观察 …… )，中心对称，……
…… 时也可能考虑轮换函数

2. 根据 ……

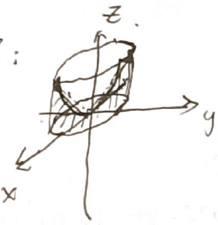
3. 根据区域 …… 序。

把区域表示成利于积分的形式 $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D_{xy}, z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D_z, c_1\le z\le c_2\}$.

熟悉二次曲面的基础上，可能利用对称性，交线辅助作图。 ✓

例8：



直角坐标："先一后二"：先对与z轴平行的直线积分，再在圆上积分

"先二后一"：先对每个高度上的圆环积分，再沿z方向累积起来

$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le x^2+y^2\}$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2},\ 0\le z\le x^2+y^2\}$

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\,dz.$$

柱坐标：代入 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z.\end{cases}$，可以解得。~~$\Omega=\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z$~~ 得到 $I=\iiint_\Omega f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$.

类似于直角坐标，先对z积分，再对xoy上投影的圆积分时，利用柱坐标。

$\Omega$：$0\le\theta<2\pi,\quad 0\le\rho\le 1,\quad 0\le z\le\rho^2$.

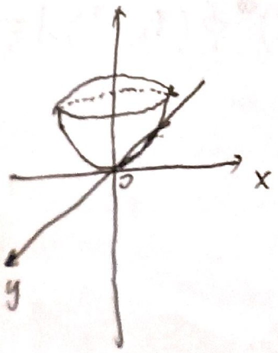
$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz.$$

例9：

由绕z轴的旋转对称性，选柱坐标积分，先一（对z积分）后二（xoy投影为圆）。

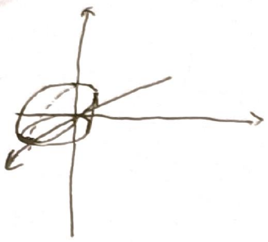
联立，得交线：$\begin{cases}z=x^2+y^2\\ z=\sqrt{2-x^2-y^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1.\end{cases}$ $\Omega$在xoy面上投影为 $x^2+y^2\le 1$.

$\Omega$：$0\le\theta<2\pi,\quad 0\le\rho\le 1,\quad \rho^2\le z<\sqrt{2-\rho^2}$.



$$I=\iiint_{\Omega'} z\rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}z\rho^3\,dz=\cdots=\frac{5}{24}\pi$$

例10：

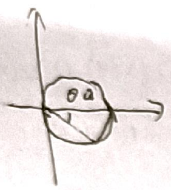


球体的半径与圆柱底面的直径相同

区域显然奇怪，但总归其在xoy投影是一个圆，~~也就是~~

其表面由圆柱面、上半球面的一部分、和下半球面的一部分构成.

由对称性，计算第一部分体积即可，这部分区域计作$\Omega'$.



利用柱坐标. 先一(对z)后二($\rho,\theta$). (这里有对函数的先后)

$$I = 2\iiint_{\Omega'} dv = 2\iint_{x^2+y^2\le ax} dxdy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz = 2\int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz.$$

$$= 2\int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dy = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\, d\rho.$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a^3 = \frac{8}{9}a^3.$$

$$I = 4\iiint_{\Omega'} dv = 4\iiint_{\Omega'} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} d\rho \int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} \rho\, dz$$

例11：

$$\iiint_\Omega \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 dv = \iiint_\Omega\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dv + 2\iiint_\Omega\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}\right)dv$$

名由对称性 $\iiint_\Omega x^2 dv = \iiint_\Omega y^2 dv = \iiint_\Omega z^2 dv = \iiint_\Omega \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\,dv = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\, dr = \frac{4}{15}\pi R^5$

关于x.y.z 镜面对称，可知交叉项积分为0. $I = \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{4}{15}\pi R^5$

例12：区域决定了能用直角坐标积分，但是函数又让我们回到了柱坐标.

$$I = \iint_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} dxdy \int_0^1 \frac{dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec\theta} d\rho \int_0^1 \frac{\rho\, dz}{(1+\rho^2+z^2)^2}.$$

$$= 2\int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec\theta} \frac{\rho\, d\rho}{(1+\rho^2+z^2)^2}.$$

交换积分次序

相当于先二后一积分(对z积分).

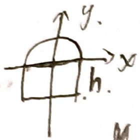
所以 $I = \int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\right) dz = \frac{1}{16}\pi^2 - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \frac{dz}{1+\sec^2\theta+z^2}}_{I_1}$

令 $z = \tan t$，则 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\, dt$. ($1+\tan^2 t = \sec^2 t$ $d(\tan t) = \sec^2 t\, dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta+\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\, dt = \frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}.$$

$I = \frac{\pi^2}{32}$.

例13：

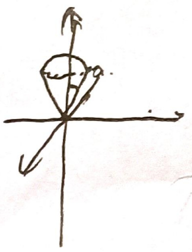
例13:  假设圆半径为1，密度为1.

$$y_c = \frac{\iint_D y\,dxdy}{\iint_D dxdy} = 0 \Rightarrow \iint_D y\,dxdy = 0$$，其中D: $-1 \le x \le 1$, $h \le y \le \sqrt{1-x^2}$.

$$\iint_D y\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{h}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}(1-x^2) - \frac{1}{2}h^2\right]dx = 1 - \frac{1}{3} - h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

比为 3 : $\sqrt{6}$.

例14: 球锥体具有绕原点O的中心对称性，因故，采取球坐标.



$$dF = \frac{G\rho_0\,dv}{r^2}\cos\varphi.$$

$2\pi$   $1-\cos\varphi$.   $G\rho_0 R$.

$$F = \iiint_\Omega \frac{G\rho_0\,dv}{r^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^R \frac{G\rho_0}{r^2} r^2 \sin\varphi\cos\varphi\,dr.$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\alpha} \sin 2\varphi\,d(2\varphi)$$

$$= \frac{1}{4}(1-\cos 2\alpha).$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-\cos 2\alpha)\,G\rho_0 R.$$