二重积分 Step1、确定积分区域 } 例1.3
Step2、确定积分顺序 } 例2.3
Step3、求出积分

⇒ Case1、积分区域简单 ⇒ Case2、积分区域"复杂"

有些时候可以通过换元简化
1、极坐标换元 例4、
2、一般换元 (Jacobi矩阵) 新加的那题
3、参数量表示的曲线 例5、

对于有对称性的积分与积分区域，可以利用对称性简化计算 例6.7

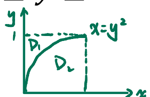
“数学外卖”高数组重积分讲义

何山、章翔、戴云舒、王衡宇、田煜峰、吴天昊

2025 年 5 月 10 日

Key：确定积分区域

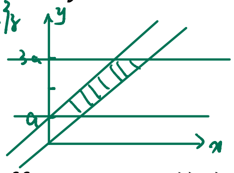
【例 1】计算二重积分：$I=\iint_D |x-y^2|\,dxdy$.其中，平面区域D满足$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$.



Sol: $I=\iint_D |x-y^2|\,dxdy$
$=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}$
$=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} y^2-x\,dx+\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} x-y^2\,dy$
$=\int_0^1 \frac{1}{2}y^4\,dy+\int_0^1 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{1}{10}+\frac{4}{15}=\frac{11}{30}$

【例 2】计算$\iint_D x^2+y^2\,d\sigma$，其中D是由直线$y=x, y=x+a, y=a, y=3a(a>0)$所围成的区域.

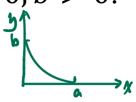
Key：确定积分顺序



$I=\iint_D x^2+y^2\,d\sigma$
$=\int_a^{3a} dy\int_{y-a}^{y} x^2+y^2\,dx$
$=\int_a^{3a}\frac{1}{3}(y^3-(y-a)^3)+ay^2\,dy$
$=\frac{20}{3}a^4+\frac{1}{3}a\cdot 26a^3-\frac{4}{3}a^4=14a^4$

【例 3】计算$I=\iint_D y\,dxdy$，其中D是由曲线$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$及$x$轴和$y$轴围成，其中$a>0, b>0$.

Key：用(x,z)



$I=\iint_D y\,dxdy$
$=\int_0^b y\,dy\int_0^{a(1-\sqrt{\frac{y}{b}})^2}dx=\int_0^b ay(1-\sqrt{\frac{y}{b}})^2\,dy$
$=\int_0^b ay-\frac{2a}{\sqrt{b}}y^{\frac{3}{2}}+\frac{a}{b}y^2\,dy=\frac{1}{2}ab^2-\frac{2a}{\sqrt{b}}\cdot\frac{2}{5}\cdot b^{\frac{5}{2}}+\frac{a}{3b}\cdot b^3=\frac{1}{30}ab^2$

【例 4】累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta} r\,f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr$等于（D）.

Key 极坐标换元

A.$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,dx$　　B.$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

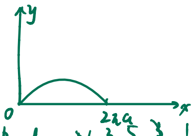
C.$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy$　　D.$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,dy$

$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　$\Gamma:\begin{cases}x=\cos^2\theta\\ y=\cos\theta\sin\theta\end{cases}$
$\Rightarrow \Gamma: x^2+y^2=x$　$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$

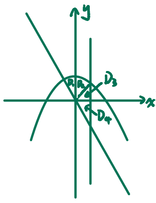
$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$.　$(0,\pi)>0$　$(\pi,2\pi)<0$.

【例 5】计算$\iint_D y\,dxdy$，其中D是由L：$\begin{cases}x=a(t-sint)\\ y=a(1-cost)\end{cases}$,$(0\le t\le 2\pi)$与$x$轴围成的区域.

Key 换元法　摆线　$2\sin^2\frac{t}{2}$



$I=\iint_D y\,dxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)} y\,dy$
$=\int_0^{2\pi a}\frac{1}{2}[y(x)]^2\,dx$
$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[y(x(t))]^2 x'(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3\,dt$
$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}8a^3\sin^6\frac{t}{2}\,dt=8a^3\int_0^{\pi}\sin^6 y\,dy=16a^3\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi a^3$



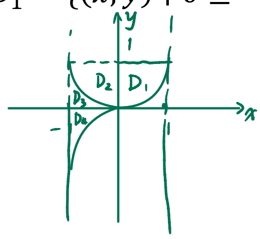
【例 6】计算二重积分$\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\,dxdy$，其中$D$是曲线$y=4-x^2$，直线$y=-3x$及直线$x=1$围成的位于直线$x=1$左边的部分.

Key：区域对称

$I=\underbrace{\iint_{D_1}+\iint_{D_2}}_{x对称}+\underbrace{\iint_{D_3}+\iint_{D_4}}_{y对称}=0$

【例 7】例题 6 设 $(D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1, x^3\le y\le 1\})$，$(D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, x^3\le y\le 1\})$，则 $\iint_D(x^3\sin y+y^3\cos x)\,d\sigma=$（A）.

Key 对称



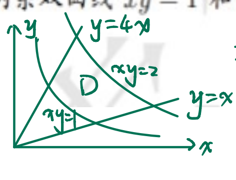
$2\iint_{D_1} y^3\cos x$

A. $2\iint_{D_1} y^3\cos x\,d\sigma$　　B. $2\iint_{D_1} x^3\sin y\,d\sigma$

C. $4\iint_{D_1}(x^3\sin y+y^3\cos x)\,d\sigma$　　D. 0

Key 换元使区域简化

例题 2 $\iint\limits_D x^2y^2 d\sigma$, 其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$, 直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.



$\Rightarrow \iint_D x^2y^2\,d\sigma$　令 $u=\frac{y}{x}$　$v=xy$　$D\to\Omega$

$J^{-1}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\\ y & x\end{vmatrix}=-\frac{y}{x}-\frac{y}{x}=-2u$

$\Rightarrow I=\iint_\Omega v^2|J|\,dudv=\int_1^4 du\int_1^2\frac{v^2}{2u}\,dv=\frac{7}{3}\ln 2$

【例 8】已知，Ω是由$x^2+y^2=4$，$z=0$以及$z=x^2+y^2$所围成的立体。如果将$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$分别化成直角坐标以及柱面坐标的三次积分时，它们分别为$I=$__________________________；以及$I=$__________________________.

【例 9】计算$I=\iiint_{\Omega} z(x^2+y^2)\,dv$，其中$\Omega$是由$z=x^2+y^2$与$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围成的立体.

【例 10】求球体$x^2+y^2+z^2\le a^2$和圆柱体$x^2+y^2\le ax(a>0)$的公共部分所成空间区域的体积V.

【例 11】计算积分$\iiint_{\Omega}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2\,dv$，$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\le R^2$.

【例 12】计算三重积分：$I=\iiint_{\Omega}\frac{dx\,dy\,dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$.

其中Ω：$0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$.

【例 13】在均匀半圆形薄板下接一个宽与直径相同的长方形的均匀薄板，要求质心在圆心处，求圆半径与长方形的高之比.

【例 14】求半径为R，半顶角为α，密度为ρ_0的均匀球锥体对顶点处单位质点的引力.