数学外卖高数期中讲座

何山、王一诺、刘欣晨、孙雨乐、李昕澍

2025 年 4 月 19 日

1. 已知 $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=$____。

2. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$。设 $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{y}=\vec{a}-k\vec{b}$。若以 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 为邻边的平行四边形的面积为 4，则 $k=$

3. 已知 $A(1,2,0)$，$B(2,3,1)$，$C(4,2,2)$，$M(x,y,z)$ 在四点确定的平面上，求点 M 的坐标 x,y,z 所满足的关系式。

4. 一条直线 l 经过点 $A(-3,5,9)$，且与两条直线 l_1、l_2 相交，其中

$$l_1:\begin{cases}y=3x+5\\z=2x-3\end{cases},\quad l_2:\begin{cases}y=4x-7\\z=5x+10\end{cases}$$

求 l 的方程。

5. 已知两直线

$$L_1:\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1},\quad L_2:\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$$

   (a) 证明这两条直线异面；

   (b) 求这两条异面直线之间的距离；

   (c) 求这两条异面直线的公垂线方程。

6. 试求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影点以及关于该平面对称点的坐标。

7. 曲面 $z-e^z+xy=1$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为。

8. 求曲线

$$\begin{cases}x^2-z=0,\\3x+2y+1=0\end{cases}$$

在点 $(1,-2,1)$ 处的切线 L 的方程，并求该切线绕 z 轴旋转而成的旋转曲面 Σ 的方程。

9. 求过直线

$$\begin{cases}x+y=0,\\x-y+2z=6\end{cases}$$

且切于球面 $x^2+y^2+z^2+2z=3$ 的平面方程。

10. 曲面 $x^2+4y^2+z^2=4$ 与平面 $x+z=a$ 的交线在 yOz 面上的投影曲线方程为

11. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x,y)=xy-f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$，求

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

12. 已知圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 内切于 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$），求 a,b 的值使得后者面积 S 最小。

13. 求曲线 $x^2+xy+y^2+2x-2y-12=0$ 上的点到原点距离的最大值和最小值。

14. 设平面有界区域 D 位于第一象限，由曲线 $x^2+y^2-xy=1$、$x^2+y^2-xy=2$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$、$y=0$ 围成，计算

$$\iint_D \frac{1}{3x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

15. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x,\ 1\le x\le 2\right\}$，求二重积分

$$\iint_D ye^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

16. 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ （$0\le t\le 2\pi$）与 x 轴围成，计算

$$\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

17. 设 $f(x,y)=\max\left\{\sqrt{x^2+y^2},1\right\}$，$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\le y\le 1\right\}$，求

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

18. 计算

$$\iint_D \left[x+y+(e^x\cos x-e^y\cos y)\sin(xy)\right]\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x+y\ge 0,\ x\le 1,\ y\le 1\right\}$.

19. 计算二重积分

$$\iint_D \left|x^2+y^2-\sqrt{2}(x+y)\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 4\right\}$.

20. 计算二重积分

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\le |x|+|y|\le 2\right\}$.

21. 计算

$$\iint_{x^2\le y\le 3}\sqrt{\lfloor y-x^2\rfloor}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\lfloor y-x^2\rfloor$ 表示不超过 $y-x^2$ 的最大整数。

22. 平面区域 D 由直线 $x+y=1$、$x+y=2$、$y=x$ 和 $y=2x$ 围成，计算二重积分

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$