1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ $\Rightarrow$ $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\vec{a}^2\vec{b}^2$

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\sqrt{25-16}=3$.

2. 即 $|\vec{x}\times\vec{y}|=4$. $\vec{x}\times\vec{y}=(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-k\vec{b})=(-k-1)\vec{a}\times\vec{b}$

则 $4=|\vec{x}\times\vec{y}|=|k+1||\vec{a}\times\vec{b}|=2|k+1|$，解得 $k=1$或-3

3. A.B.C.M 四点共面，即 $\vec{AB},\vec{AC},\vec{AM}$ 三向量共面，也即张成的平行六面体体积为零.

$\vec{AB}=(1,1,1)$ $\vec{AC}=(3,0,2)$ $\vec{AM}=(x-1,y-2,z)$.

可得 $\begin{vmatrix}1&1&1\\3&0&2\\x-1&y-2&z\end{vmatrix}=0$，$\boxed{\text{即}\ \begin{vmatrix}1&1&1\\1&-2&0\\x-3&y-4&0\end{vmatrix}=0\text{，则 }(y-4)+2(x-3)=0\text{，即 }2x+y-10=0}$

~~然~~ 则 $2(x-1)+(y-2)-3z=0$. 即 $2x+y-3z-4=0$.

4. 过点 l_1 的平面系：$(3x-y+5)+\lambda(2x-z-3)=0$ 即 ~~$(2\lambda+3)x\ \ldots\ y-\lambda z-3\lambda-5=0$~~

由过点A，可得：~~$-3(2\lambda+3)\ldots$~~ $-9-18\lambda=0$. $\lambda=-\frac{1}{2}$

可得 π_1：$4x-2y+z+13=0$

过点 l_2 的平面系：$(4x-y-7)+\mu(5x-z+10)=0$.

由过点A，可得 $-24-14\mu=0$. $\mu=-\frac{12}{7}$.

可得 π_2：$-32x-7y+12z-169=0$.

联立，可得 l：$\begin{cases}4x-2y+z+13=0\\-32x-7y+12z-169=0\end{cases}$

$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

~~F_y~~ $\begin{vmatrix}F_y&F_z\\G_y&G_z\end{vmatrix}=0$.

F_y

① $\begin{vmatrix}F_x&F_y\\G_x&G_y\end{vmatrix}\neq0$.

$\begin{cases}x=x(z)\\y=y(z)\\z=z\end{cases}$ $z=z_0$ 全微分

② $\begin{vmatrix}F_x&F_y\\G_x&G_y\end{vmatrix}=0$

5. (a) 证明：点 $A(9,-2,0)$，$B(0,-7,2)$ ~~垂直~~分别在直线 L_1. L_2 上.

$\vec{AB}=(-9,-5,2)$.

L_1 方向：$\vec{\tau_1}=(4,-3,1)$，L_2 方向 $\vec{\tau_2}=(-2,9,2)$.

则由 $\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}\cdot\vec{AB}=\begin{vmatrix}4&-3&1\\-2&9&2\\-9&-5&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-3&1\\-10&15&0\\-17&1&0\end{vmatrix}=245$

(b). 公垂线的单位法向量：$\vec{n}=\dfrac{\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}}{|\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}|}$

从而由于 $\vec{AB}$ 在 $\vec{n}$ 上的投影为异面直线间距离，可得.

$d=|\vec{AB}\cdot\vec{n}|=\dfrac{|\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}\cdot\vec{AB}|}{|\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}|}$ ~~245~~

由 $\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}=\begin{vmatrix}i&j&k\\4&-3&1\\-2&9&2\end{vmatrix}=(-15,-10,30)$. 则 $|\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}|=5\sqrt{3^2+2^2+6^2}=35$. 则 $d=\frac{245}{35}=7$.

(c). 公垂线方向：已得 $\vec{\tau}=\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}=(-15,-10,30)=5(-3,-2,6)$.

~~$\vec{\tau}=\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 4 & -3 & 1\\ -2 & 9 & 2\end{vmatrix}=(-15,-10,$~~ 方便起见，取 $\vec{\tau_0}=(-3,-2,6)$

$z=1-x-y$.

$z=-\frac{xy}{x+y}$.

则记 π_1 为 L_1 与公垂线决定平面，

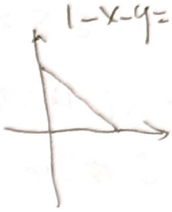
π_2 为 L_2 与公垂线决定平面

$\vec{n_1},\vec{n_2}$ 为 π_1,π_2 法向量.

$z=1-x-y$.

~~则 $\vec{n_1}=\vec{\tau_1}\times\vec{\tau}=\vec{\tau_1}\times(\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2})=-(\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2})\times\vec{\tau_1}=-\vec{\tau_1}^2\vec{\tau_2}+\vec{\tau_1}\vec{\tau_2}\vec{\tau_1}$~~

$1-x-y=-\frac{xy}{x+y}$



则 $\vec{n_1}=$ ~~$\begin{vmatrix} i & j & k \\ & & \end{vmatrix}$~~ $\vec{\tau_0}\times\vec{\tau_1}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -3 & -2 & 6\\ 4 & -3 & 1\end{vmatrix}=(16,27,17)$.

$\vec{n_2}=\vec{\tau_0}\times\vec{\tau_2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -3 & -2 & 6\\ -2 & 9 & 2\end{vmatrix}=(-58,-6,-31)$.

$xy+yz+xz=0$

$z=-\frac{xy}{x+y}$.

则 π_1：$16(x-9)+27(y+2)+17z=0$，即 $16x+27y+17z+198=0$.

$-\frac{1}{2}x\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)$

π_2：~~-58~~ $-58x-6(y+7)-31(z-2)=0$，即 $-58x-6y-31z+20=0$.

联立得 l：$\begin{cases}16x+27y+17z+198=0\\ -58x-6y-31z+20=0\end{cases}$.

$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

6. 解：记 $A(-1,2,0)$，$\pi: x+2y-z=1$.

则垂线方程 l：$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$.

联立得 $\begin{cases}x+2y-z=1\\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-\frac{4}{3}\\ y=\frac{4}{3}\\ z=\frac{1}{3}\end{cases}$ 则投影点 $P\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$.

则 $\vec{AP}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，则对称点 $\vec{OB}=\vec{OP}+\vec{AP}=\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

$=\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

7. 解：令 $G(x,y,z)=xy+z-e^z-1$.

则 $\nabla G(x,y,z)=(y,x,1-e^z)$，$\nabla G\big|_{(2,1,0)}=(1,2,0)$.

则切平面之法方向 $\vec{n}=\nabla G=(1,2,0)$，

切平面方程：$(x-2)+2(y-1)=0$，即 $x+2y-4=0$.

8. 令 $x=2t$，可得

$\begin{cases} x=2t\\ y=-3t-\frac{1}{2}\\ z=4t^2.\end{cases}$ 则 $\vec{\tau}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=(2,-3,8t)$.

则 $\vec{\tau_0}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)\Big|_{x=2t=1}=(2,-3,4)$.

切线 l：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{4}$，设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为之上一点.

则平面 $z=z_0$ 与直线 l 交点：$\begin{cases} z=z_0\\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{4}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{z_0+1}{2}\\ y=-\frac{3}{4}z_0-\frac{5}{4}\\ z=z_0\end{cases}$

则三上 $P(x_0,y_0,z_0)$ 满足方程 $x_0^2+y_0^2=\left(\frac{z_0+1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{4}z_0-\frac{5}{4}\right)^2$，

则之：$x^2+y^2-\frac{13}{16}z^2-\frac{19}{8}z=\frac{29}{16}$.

9. 解：球面 S：$x^2+y^2+(z+1)^2=4$.

球心 A：$(0,0,-1)$，半径 $r=2$.

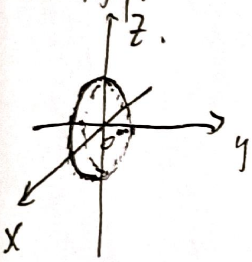
设平面东：~~x+y+λz~~ $x-y+2z-6+\lambda(x+y)=0$，即 $(\lambda+1)x+(\lambda-1)y+2z-6=0$.

则 A 到平面 $(\lambda+1)x+(\lambda-1)y+2z-6=0$ 的距离：

$$d=\frac{|2\times(-1)-6|}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2+4}}=r=2$$，解得 $\lambda=\pm\sqrt{5}$.

则平面为 $(\sqrt{5}+1)x+(\sqrt{5}-1)y+2z-6=0$ 或 $(-\sqrt{5}+1)x+(-\sqrt{5}-1)y+2z-6=0$

10. 解：



联立，

$$\begin{cases} x^2+4y^2+z^2=4. \\ x+z=a. \end{cases}$$

消去 x，得：$(a-z)^2+4y^2+z^2=4$，即 $2z^2+4y^2-2az=4-a^2$.

讨论：a 取何值时，方程有解？配方：$2\left(z-\frac{a}{2}\right)^2+4y^2=4-\frac{a^2}{2}$.

方程有解 $\Leftrightarrow$ $4-\frac{a^2}{2}\geq 0$，即 $|a|\leq 2\sqrt{2}$.

梳理：

一、向量代数.

1. 运算律：外积有反交换律、不满足结合律.

混合积有轮换对称性. $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}\,\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}\,\vec{a}$，Lagrange 恒等式：

2. 几何意义：外积的几何意义，混合积的几何意义（内积的物理意义）

3. 计算：① 坐标形式 ② 模长、夹角形式.

二、直线，平面.

1. 直线：① 一点，一方向. ② 两平面相交. ③ 参数方程.

2. 平面：~~① 一点，一方向~~ 点法式.

3. 面与面：① 相交 ② 平行，$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. ③ 夹角. ~~④ 平面束~~

4. 线与线：① 共面. ② 异面，异面直线间距离，公垂线. ③ 夹角.

5. 线与面：① 相交 ② 平行，线面距离，点面距离 $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{}$ ③ 平