同濟大學
TONGJI UNIVERSITY
地址：中国上海市四平路1239号　邮编：200092
1239 SIPING ROAD SHANGHAI CHINA 200092
电话（TEL）：+86 21-　传真（FAX）：+86 21-
网址（WEB）：www.tongji.edu.cn

多元函数微分学

Q1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ 0\le\theta<2\pi}} \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^m|\cos^m\theta|+\rho^n|\sin^n\theta|} \quad \cdots(*)$$

要使得在(0,0)处不连续，即(*)极限关于ρ不一致趋于0.

$$\Rightarrow \begin{cases} m-2\geq 0 \\ n-2\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m\geq 2 \\ n\geq 2 \end{cases}$$

容易验证此时偏导存在. Ans为 $m\geq 2,\ n\geq 2$

RK：此处利用极坐标换元，考查(0,0)处极限，其中好处是只需考虑极限是不是只与ρ有关而和θ无关（一致地）

类比 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 中 $y=kx$ 的设法！

Q2：自行求导即可，略

Q3：(1) 在(0,0)不连续是容易得到的，取 $y=kx$ 即可.

各阶偏导存在：$xy\neq 0$ 时，直接求导即可.

$xy=0$ 时，$f_x'(x,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,0)-f(x,0)}{\Delta x}=0=f_y'(0,y)$

$$f_x'(0,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=1\times 0=0$$
$$=f_y'(x,0)$$

$f_x'(0,0)=0$　同理可求各阶偏导.

(2) 连续显然.

$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在.

$f_y(0,0)$ 同理

(3) 证明 f_{xy} 和 f_{yx} 相等.

① ~~说明~~ 求 f_x 和 f_y, $(0,0)$ 处用定义. 其它处用解析式

② 求 f_{xy} 和 f_{yx}. 同理① 在$(0,0)$不连续: 即说明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)\neq f_{xy}(0,0)$$

(4) 方向导数:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^4\cos\theta+\rho^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\quad(\theta\neq 0,\pi)$$

存在 ($\theta\neq 0$ 和 π)

$\theta=0$ 和 π 时. $y=0$. ~~方向导数可求得为0~~.

在原点不可微. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ 0\le\theta<2\pi}}\frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^3(\rho^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)}$ 和θ有关.

Q4: 解: 由线性变换 $\cancel{\begin{cases}x=\xi+\lambda_1\eta\\ y=\xi+\lambda_2\eta\end{cases}}$ $\begin{cases}\xi=x+\lambda_1 y\\ \eta=x+\lambda_2 y.\end{cases}$

方程可化为: $u_{\xi\xi}(A+2\lambda_1B+\lambda_1^2C)+u_{\xi\eta}(2A+2(\lambda_1+\lambda_2)B+2\lambda_1\lambda_2C)$

$+u_{\eta\eta}(A+2\lambda_2B+\lambda_2^2C)=0.$

当$\lambda_1.\lambda_2$是 $A+2Bx+Cx^2=0$ 的根时 $(\Delta>0)$

方程化为 $\frac{4}{C}(AC-B^2)u_{\xi\eta}=0$ (不妨$C\neq 0$) 而后将ξ,η用x,y

积分解: $u_\xi=f(\xi)$ $u=\int f(\xi)d\xi+g(\eta)$ 代入即可

同济大学
TONGJI UNIVERSITY
地址：中国上海市四平路1239号 邮编：200092
1239 SIPING ROAD SHANGHAI CHINA 200092
电话（TEL）：+86 21- 传真（FAX）：+86 21-
网址（WEB）：www.tongji.edu.cn

Q5：f的Jacobi矩阵和梯度.

若 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

记f的Jacobi矩阵为

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

此时f的导数. 特别地:

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \nabla f^T \Rightarrow \underline{\underline{\nabla f = J_f^T}}$$

多元函数的Hessian矩阵:

∇f 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的向量值函数.

$$H_f = J_{\nabla f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

若 $\nabla f = 0$ $(x = x_0)$

$H_f > 0$（正定） x_0 为极小值点

$H_f < 0$（负定） x_0 为极大值点

本题 Hint:

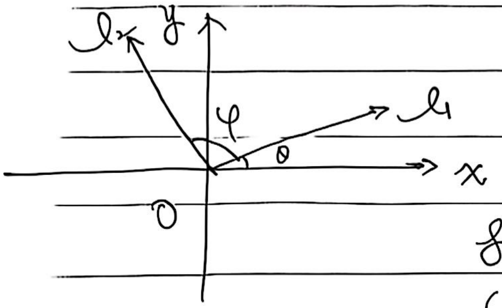
$f(\vec{x}) = A\vec{x} \Rightarrow J_f = A$

$\|Ax-b\|^2 = (Ax-b)^T(Ax-b)$

Q6：解：

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_2} = f_x\cos(\theta+\varphi) + f_y\sin(\theta+\varphi)$$



反解得：

$$f_x = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\sin(\theta+\varphi) - \frac{\partial f}{\partial l_2}\sin\theta\right)$$

$$f_y = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial l_1}\cos(\theta+\varphi)\right)$$

$$f_x^2+f_y^2 = \frac{1}{\sin^2\varphi}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 - 2\frac{\partial f}{\partial l_1}\frac{\partial f}{\partial l_2}\cos\varphi\right)$$

$$\le \frac{1}{\sin^2\varphi}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 + 2\left|\frac{\partial f}{\partial l_1}\right|\left|\frac{\partial f}{\partial l_2}\right|\right)$$

$$\le \frac{2}{\sin^2\varphi}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2\right].$$

Q7：(1) 由 $y_x = f_x + f_t t_x$ 和 $F_x + F_y y_x + F_t t_x = 0$ 联立即得

(2) 课本习题，略．

Q8：$F(x,y,z) = x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18$

$F_x = 2x-6y$　$F_y = -6x+20y-2z$　$F_z = -2y-2z$

$z_x = \frac{x-3y}{y+z}$　$z_y = \frac{-3x+10y-z}{y+z}$　求得驻点 $(9,3)$，$(-9,-3)$

$$z_{xx} = \frac{(y+z)-(x-3y)z_x}{(y+z)^2} \qquad z_{xy} = \frac{-3(y+z)-(x-3y)z_y}{(y+z)^2}$$

$$z_{yy} = \frac{(10-z_y)(y+z)-(-3x+10y-z)(1+z_y)}{(y+z)^2}$$

在 $(9,3)$. $AC-B^2>0$. $(-9,-3)$ $AC-B^2<0$.

极小值 3. 极大值 -3.

Q9: (1) 设 $L(x,y,\lambda) = xy-\lambda\left[(x-1)^2+y^2-1\right]$

$$\begin{cases} L_x = y-2\lambda(x-1)=0 \\ L_y = x-2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = (x-1)^2+y^2-1=0 \end{cases} \Longrightarrow$$ 可疑极值点为 $(0,0),\ (\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),\ (\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$f_{max} = \max\left\{f(0,0),\ f(\tfrac{3}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}),\ f(\tfrac{3}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2})\right\} = f(\tfrac{3}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

$$f_{min} = \min - - - = f(\tfrac{3}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

容易知道 $(0,0)$ 不是极值点.

注: 本题求解可参考周志华《机器学习》支持向量机一章.

(2) 考虑一般形 $\min\limits_{x} f(x)$ s.t. $g(x)\le 0$. 问题.

① $g(x)<0$. 转化为无条件极值

② $g(x)=0$ 时. $L(x,\lambda) = f(x)-\lambda g(x)$

$$\Rightarrow L_x = \nabla f(x) - \lambda\nabla g(x) = 0 \Rightarrow \nabla f(x) = \nabla g(x)\lambda \quad \cdots(*)$$

$$L_\lambda = g(x) = 0.$$

由(*)式. 因为 $\nabla g(x)$ 指向 $g(x)$ 增大方向 (即 $\{x \mid g(x)\le 0\}$ 的外部). 而 ∇f 应指向区域内. $\Rightarrow \lambda\le 0$. 由在①情况下, $L(x,\lambda)$ 中 λ 可取 0. 从而有:

1) $\lambda\le 0$ 2) $\lambda g(x)=0$ 3) $g(x)\le 0$ 4) $\nabla f(x) = \nabla g(x)\lambda$ 1), 2) 3), 4) 合称 KKT 条件

同济大学
TONGJI UNIVERSITY
地址：中国上海市四平路1239号　邮编：200092
1239 SIPING ROAD SHANGHAI CHINA 200092
电话（TEL）：+86 21-　传真（FAX）：+86 21-
网址（WEB）：www.tongji.edu.cn

Q10: $F(nx-lz, ny-mz)=0=f(x,y,z)$

切平面法向量为 $(F_x\cdot n, F_y\cdot n, -lF_z-mF_z)$

显然与 (l,m,n) 正交，从而直线与平面平行。

Q11: 切点记为 (x_0,y_0,z_0)

记 $f_1(x,y,z)=xyz-\lambda$　　$f_2(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$

可得切平面

π_1: $y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$.

π_2: $\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$.

切平面相同：首先 $x_0, y_0, z_0\neq 0$ $(\lambda>0)$

从而 $\dfrac{\frac{2x_0}{a^2}}{y_0z_0}=\dfrac{\frac{2y_0}{b^2}}{x_0z_0}=\dfrac{\frac{2z_0}{c^2}}{x_0y_0}$.

$\Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}=\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow \lambda=\frac{abc}{\sqrt{3}}$.

Q12: (1) "$\Rightarrow$" $f(tx,ty)=t^kf(x,y)$. 关于 t 求导：

$xf_x(tx,ty)+yf_y(tx,ty)=kt^{k-1}f(x,y)$ 令 $t=1$

$\Rightarrow xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=kf(x,y)$

"$\Leftarrow$": $xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=kf(x,y)$

$\Rightarrow tx f_x(tx,ty)+ty f_y(tx,ty)=kf(tx,ty)$

$F(t)=\dfrac{f(tx,ty)}{t^k}$ $\quad F'(t)=\dfrac{[xf_x(tx,ty)+yf_y(tx,ty)]t^k-kt^{k-1}f(tx,ty)}{t^{2k}}$

$=0.$

$F(t)=F(1)=f(x,y)$

(2) 切平面方程为 $F_x^{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+F_y^{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+F_z^{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)=0 \quad \cdots(*)$

而 $xF_x+yF_y+zF_z=nF(x,y,z)$

$(*)$可化为：$F_x(x_0,y_0,z_0)x+F_y(x_0,y_0,z_0)y+F_z(x_0,y_0,z_0)z=nF(x_0,y_0,z_0)$.