“数学外卖”高数组多元函数微分学讲义

王衡宇 解淑涵 许子寒 李昕澎 李长浩

日期：April 12, 2025

例 1. 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|^m+|y|^n},\ x^2+y^2\neq 0\\ 0,\ x^2+y^2=0\end{cases}$（$m$，$n$ 为正整数）在 $(0,0)$ 处不连续，但偏导数存在，则 m，n 需满足的条件是什么？

例 2. 设 $u=f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

例 3. (1) 证明：$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}},\ xy\neq 0\\ 0,\ xy=0\end{cases}$ 有各阶偏导数，但在 $(0,0)$ 不连续.

(2) 证明：$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，但在 $(0,0)$ 处两个偏导不存在.

(3) 证明：

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},x^2+y^2\neq 0\\ 0,x^2+y^2=0\end{cases}$$

的两个二阶混合偏导数相等，但都在 $(0,0)$ 不连续.

(4) 证明：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 各个方向导数都存在，但在原点不可微.

例 4. 确定 λ_1 和 λ_2 使线性变换 $\begin{cases}\xi=x+\lambda_1 y\\ \eta=x+\lambda_2 y\end{cases}$ 将方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\text{，其中 } A\text{、}B\text{、}C \text{ 为常数且 } AC-B^2<0$$

变为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，并由此求出满足方程 $A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的一切函数.

例 5.$f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，梯度 $\nabla f(\boldsymbol{x})\triangleq(f_{x_1},\cdots,f_{x_n})^T$，Hessian 矩阵 $Hf(\boldsymbol{x})\triangleq\left(\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{ij}$.

(1) 当 $f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}+r$（$P^T=P$）时，求 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 和 $Hf(\boldsymbol{x})$;

(2) 当 $f(\boldsymbol{x})=\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2$ 时，求 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 和 $Hf(\boldsymbol{x})$.

例 6. 设二元函数 $f(x,y)$ 可微，$\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{l}_2$ 是两个给定方向，它们之间夹角为 $\varphi\in(0,\pi)$，证明：

$$f_x^2+f_y^2\leqslant \frac{2}{\sin^2\varphi}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right)^2\right]$$

例 7. $y=f(x,t)$，其中 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x、y 的函数，f，F 有一阶连续导数.

(1) 试证明：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}$

(2) 设 $\begin{cases} x=e^u+u\sin v \\ y=e^u-u\cos v \end{cases}$，求 u_x，u_y，v_x，v_y.

例 8. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 所确定的隐函数，试问函数 $z=z(x,y)$ 是否存在极值？若存在极值，请计算并指出是极大值还是极小值.

例 9. (1) 求 $f(x,y)=xy$ 在圆周 $S^1=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2=1\}$ 上的最值与条件极值点；

(2) 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上有 m 个点 $(\boldsymbol{x_i},y_i)^T$，$i=1,2,...,m,\boldsymbol{x_i}\in\mathbb{R}^n$，请确定 $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$ 和 $b\in\mathbb{R}$，满足 $\min_{\boldsymbol{w},b}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2$，使得 $y_i(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}_i+b)\geqslant 1$，$i=1,2,\cdots,m$.

例 10. 设 $F(u,v)$ 为连续可微函数，证明：曲面 $F(nx-lz,ny-mz)=0$ 上任一点的切平面都平行于直线 $L:\dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$.

例 11. 定出正数 λ，使曲面 $xyz=\lambda$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在某点相切，即有共同的切平面.

例 12.(1) $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，证明 $f(x,y)$ 为 k 次齐次函数的充要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=kf(x,y)$$

(2) 设 (x_0,y_0,z_0) 为曲面 $F(x,y,z)=1$ 的非奇异点，即 $(F_x,F_y,F_z)|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq(0,0,0)$，$F$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的开邻域 U 内可微，且为 n 次齐次函数，求曲面在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程.

讲座反馈问卷