例 11. 若曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (c<a<b)$ 与某过原点的平面的交线是圆，求该平面的方程.

由对称性，圆心为原点. 设交线过球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=r^2$ 与 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相减

$(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2})y^2-(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2})z^2=r^2-1$

若 $r^2-1\neq 0$，则上述为双曲柱面，有两个连通分支

矛盾，故 $r^2-1=0$

则 $\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\,y-\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\,z\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\,y+\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\,z\right)=0$

平面方程：$\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\,y-\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\,z=0$

或 $\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\,y+\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\,z=0$

例 12. 求直线 $L:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=z+1$ 绕直线 $L_1:\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 旋转一周所成的曲面方程.

直线方程可化为 $\begin{cases}x=2z+5\\y=3z+4\end{cases}$

则旋转面方程：

$(2z+5-2)^2+(3z+4-3)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$

$\Leftrightarrow\ (2z+3)^2+(3z+1)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$

例 13. 求点 $A(1,0,0)$ 与点 $B(0,1,1)$ 的连线 AB 绕 z 轴旋转一周所成的曲面方程.

$\vec{AB}=(-1,1,1)$ 直线方程：$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}$

可化为 $\begin{cases}x=-z+1\\y=z\end{cases}$

旋转面方程 $(-z+1)^2+z^2=x^2+y^2$

例 14. 求母线平行于直线 $L: x=y=z$，准线为 $\Gamma: x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=1$ 的柱面方程.

中轴线方向：$\vec{u}=(1,1,1)$ 中轴线过 $M_0(0,0,0)$

半径 $r=1$

柱面上的点P满足 $r=\dfrac{|\vec{u}\times\overrightarrow{M_0P}|}{|\vec{u}|}$

$\Leftrightarrow\ 3=(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$

例 15. 设直线 L 在 yOz 平面上的投影直线为 $\begin{cases}2y-3z=1\\x=0\end{cases}$，在 xOz 平面上的投影直线为 $\begin{cases}x+z=2\\y=0\end{cases}$，求直线 L 在 xOy 平面上的投影直线方程.

直线方程：$\begin{cases}2y-3z=1\\x+z=2\end{cases}$

xOy 投影直线方程 $\begin{cases}2y-3(2-x)=1\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y=7\\z=0\end{cases}$

例 16. 设 $\Gamma:\begin{cases}z=2-x^2-y^2\\z=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases}$，求 Γ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

在 xOy 平面投影：$\begin{cases}2-x^2-y^2=(x-1)^2+(y-1)^2\\z=0\end{cases}$

曲线方程 $\Rightarrow$ $x+y+z=2$

在 yOz $\begin{cases}z=2-(2-y-z)^2-y^2\\x=0\end{cases}$

在 xOz $\begin{cases}z=2-x^2-(2-x-z)^2\\y=0\end{cases}$

例 17. 设 $\Gamma:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$，求 Γ 的参数方程.

$x^2+y^2=2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$

令 $x-1=\cos\theta$, $y=\sin\theta$.

则 $\begin{cases} x=\cos\theta+1 \\ y=\sin\theta \\ z=\sqrt{4-(\cos\theta+1)^2-\sin^2\theta} \end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi)$