同濟大學
TONGJI UNIVERSITY
SHANGHAI
PEOPLE'S REPUBLIC OF CHINA

向量代数
- ① 大小，方向。
- ② 夹角，方向角，方向余弦。
- ③ 数量积 → 夹角，投影。
  向量积 → 垂直方向。
  混合积 → 平行六面体，判断共面。

二重外积公式。

$$(a\times b)\times c = (a\cdot c)b-(b\cdot c)a.$$

拉格朗日恒等式。

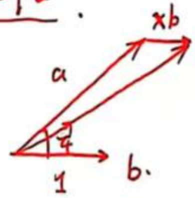
$$(a\times b)\cdot(c\times d) = (a\cdot c)(b\cdot d) - (a\cdot d)(b\cdot c).$$

例1.

$$\text{Ans} = [a\times b + b\times b + a\times c + b\times c]\cdot(c+a)$$
$$= (a\times b)\cdot c + (b\times c)\cdot a$$
$$= 2(a\times b)\cdot c = 4.$$

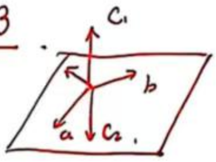
例2.

速率



$$\text{Ans} = \lim_{x\to 0}\frac{|a+xb|-|a|}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(|a+xb|-|a|)(|a+xb|+|a|)}{x(|a+xb|+|a|)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{|a+xb|^2-|a|^2}{x\cdot 2|a|} = \lim_{x\to 0}\frac{(a+xb)\cdot(a+xb)-|a|^2}{2|a|x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{|a|^2+2x\,a\cdot b+x^2|b|^2-|a|^2}{2|a|x} = \frac{a\cdot b}{|a|} = |b|\cdot\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

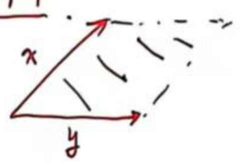
例3.



$$c_{n+1} = (c_n\times a)\times b. \Rightarrow (c_{n+1}\perp b),\ (c_1\perp a,\ c_2\perp b).$$
$$= (c_n\cdot b)a-(a\cdot b)c_n.$$
$$= -(a\cdot b)c_n. \qquad c_{n+1}\,//\,c_n.$$

$$|c_n| = |(a\cdot b)|\cdot|c_{n-1}| = |a\cdot b|^{n-1}\cdot|c_1| = 2^{n-1}\cdot 2\sqrt{3} = 2^n\cdot\sqrt{3}.$$

例4.

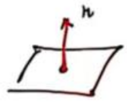
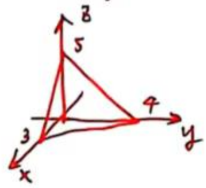


$S = |x\times y| = 4.$

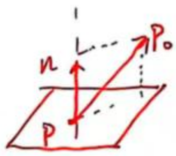
$k = -1$ or 3。

曲面 $F(x,y,z)=0$.

曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$.

$\boxed{\text{平面}}$. 方程
- 点法式. ①点、②法向量 
- 一般式 $Ax+By+Cz+D=0 \rightarrow \vec{n}$
- 截距式.  $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$.

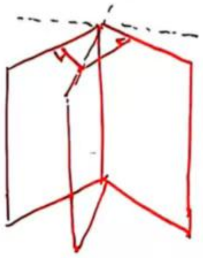
平面与平面关系.
- 平行.
- 夹角 ($\leq 90^\circ$). $\cos\theta = |\cos\langle \vec{n_1}, \vec{n_2}\rangle|$.

平面与点关系
- 在平面上.
- 不在平面上 $\longrightarrow$ 距离 

$P_0(x_0,y_0,z_0)$

$Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\frac{|\overrightarrow{PP_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

例5. 

(x,y,z) 满足.

$$\left|\frac{x+2y+3z+1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\right|=\left|\frac{2x+3y+z-4}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\right|$$

$\Rightarrow$ 两个 $x+y-2z-5=0$ 及 $3x+5y+4z-3=0$.

$\boxed{\text{直线}}$

一般方程 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$. 两平面相交.

点向式(对称式)方程. ①点. ②方向  $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

参数方程. $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$.

(参数化 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$. 曲线 $\rightarrow$ 一个参数, 曲面 $\rightarrow$ 两个参数).

方程间转化.

一般 $\rightarrow$ 点向.  $\vec{n_1}\times\vec{n_2}\rightarrow\vec{s}$.

代入 $x_0=0$, 解 y_0, z_0.

点向 $\rightarrow$ 一般、化简两个等号.

例6. $\vec{n_1}=(1,-1,1)$, $\vec{n_2}=(2,1,1)$.

代入 $x=1$. $\begin{cases} -y+z=0 \\ y+z=2 \end{cases}$ 点 $(1,1,1)$

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2i+j+3k=(-2,1,3).$$

$\Rightarrow \frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}$. (参数……).

同济大学
TONGJI UNIVERSITY
SHANGHAI
PEOPLE'S REPUBLIC OF CHINA

直线与平面关系：
- 在平面上 或平行于平面
- 相交：
  - 夹角 $\sin\varphi = |\cos\langle\vec{n}, \vec{s}\rangle|$.
  - 求交点 ⟶ 参数表示
  - 投影直线 ⟶ 平面束.

例 7.

★ 表示直线可以由两个平面.

含 l 的平面：$2x-4y-z+\lambda(3x-y-2z-9)=0$.

$(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(-1-2\lambda)z-9\lambda=0$.

与 $\vec{n}$ 垂直：$4(2+3\lambda)-(-4-\lambda)+(-1-2\lambda)=0$.

$\Rightarrow \lambda=-1$. $\begin{cases} -x-3y+z+9=0 \\ 4x-y+z=1 \end{cases}$

直线与直线关系：
- 相交 ⟶ 求交点 ⟶ 参数表示.（检验两直线是否相交?）
- 不相交：
  - 平行：距离.
  - 异面：
    - 距离

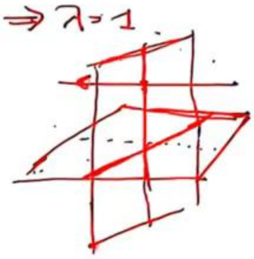
$d=\dfrac{|(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$.

    - 夹角：$\cos\varphi = |\cos\langle s_1, s_2\rangle|$
    - 垂直 ⟶ 公垂线方程.

点向
① 方向 $\vec{s_1}\times\vec{s_2}$
② 点：P_1', P_2'（参数表示） $\begin{cases} \overrightarrow{P_1'P_2'}\cdot\vec{s_1}=0 \\ \overrightarrow{P_1'P_2'}\cdot\vec{s_2}=0 \end{cases}$ 求出 P_1', P_2'.

例8. l_1上的点. $\begin{cases} x=1+u \\ y=-1+2u \\ z=1+\lambda u \end{cases}$. l_2上的点 $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$.

$\begin{cases} 1+u=-1+t \\ -1+2u=-1+t \\ 1+\lambda u=t \end{cases}$ 线性方程组有唯一解. $\Rightarrow \lambda=1$.



例9 过L_2 $z-5x+6+k(z-4y-3)=0$.

$\vec{s_1}=(4,1,-1)$ 与L_1垂直. $4(-5)+1(-4k)+1\cdot(1+k)=0$

$\Rightarrow k=-\frac{19}{3}$

过L_3. $y-2x-4+l(z-3y-5)=0$.

与L_1垂直. $4(-2)+1(1-3l)+1-l=0$

$\Rightarrow l=-\frac{7}{2}$.

$\Rightarrow \begin{cases} 15x-76y-16z-75=0 \\ 4x-23y+7z-27=0 \end{cases}$.

例10. (1). $\begin{cases} x=t \\ y=3t-1 \\ z=4t+2 \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} t-3(3t-1)+4t+2=0 \\ 2t-4(3t-1)+4t+2+1=0 \end{cases}$ 无解 $\Rightarrow$ 不相交.

$\Big\}$ 异面.

$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}=i+j+2k=(1,1,2)$. $\Rightarrow$ 不平行.

(2). $y=0$ $\begin{cases} x+z=0 \\ 2x+z+1=0 \end{cases}$ $\Rightarrow P_1=(-1,0,1)$. $P_2:(0,-1,2)$. $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-1,1)$.

$\vec{s_1}=(1,1,2)$, $\vec{s_2}=(1,3,-4)$.

$d=\dfrac{|(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$, $\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-2i-2j+2k$.

$=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3). 过l_1的平面束. $x-3y+z+\lambda(2x-4y+z+1)=0$.

平行于l_2. $1\cdot(1+2\lambda)+3(-3-4\lambda)+4(1+\lambda)=0$

$\Rightarrow \lambda=-\frac{2}{3}$, 代入得. $x+y-z+2=0$.