“数学外卖”高数组：向量代数和空间解析几何

黄泽昕　赵思铭　席睿恩　王子晨　薛冰

2025 年 3 月 22 日

第一部分　向量、平面和直线

例 1. 已知 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=2$，则 $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$__________.

例 2. $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $|\boldsymbol{b}|=1$，它们之间的夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

例 3. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是两个模都为 2 的向量，且它们之间的夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$，若 $\vec{c_1}=\vec{a}\times\vec{b}$，$\vec{c_2}=(\vec{c_1}\times\vec{a})\times\vec{b}$，$\cdots$，$\vec{c_{n+1}}=(\vec{c_n}\times\vec{a})\times\vec{b}$, $(n=1,2,\cdots)$，求模 $|\vec{c_n}|$.

例 4. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，且 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，设 $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{y}=\vec{a}+k\vec{b}$，若以 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 为邻边的平行四边形的面积为 4，则 $k=$__________.

例 5. 求两平面 $x+2y+3z+1=0$，$2x+3y+z-4=0$ 的角平分面方程.

例 6. 用对称式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases}x-y+z=1\\2x+y+z=4\end{cases}$.

例 7. 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线方程.

例 8. l_1 与 l_2 相交，求 λ. 其中 $\begin{cases}l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}\\l_2:x+1=y+1=z\end{cases}$.

例 9. 设直线 $L_1:\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$，$L_2:\begin{cases}z-5x=-6\\z-4y=3\end{cases}$，$L_3:\begin{cases}y-2x=4\\z-3y=5\end{cases}$，求平行于 L_1 并分别与 L_2，L_3 都相交的直线 L 的方程.

例 10. 设两直线 $l_1:\begin{cases}x-3y+z=0\\2x-4y+z+1=0\end{cases}$ 和 $l_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$.

(1) 证明两直线异面；

(2) 求两直线间的距离；

(3) 求过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程；

(4) 求两直线公垂线方程.

第二部分　曲面和曲线

例 11. 若曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(c<a<b)$ 与某过原点的平面的交线是圆，求该平面的方程.

例 12. 求直线 $L:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$ 绕直线 $L_1:\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 旋转一周所成的曲面方程.

例 13. 求点 $A(1,0,0)$ 与点 $B(0,1,1)$ 的连线 AB 绕 z 轴旋转一周所成的曲面方程.

例 14. 求母线平行于直线 $L:x=y=z$，准线为 $\Gamma:x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=1$ 的柱面方程.

例 15. 设直线 L 在 yOz 平面上的投影直线为 $\begin{cases}2y-3z=1\\x=0\end{cases}$，在 xOz 平面上的投影直线为 $\begin{cases}x+z=2\\y=0\end{cases}$，求直线 L 在 xOy 平面上的投影直线方程.

例 16. 设 $\Gamma:\begin{cases}z=2-x^2-y^2\\z=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases}$，求 Γ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

例 17. 设 $\Gamma:\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2}\\x^2+y^2=2x\end{cases}$，求 Γ 的参数方程.