数列极限题目解答

例1.

(1) $\frac{1}{2} \leftarrow \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+2n} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} = \frac{1}{2}$

故 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$

(2)

$\frac{1}{2}=(2^{-n})^{\frac{1}{n}} \le (2^{-n}+4^{-n}+5^{-n})^{\frac{1}{n}} \le (3\cdot 2^{-n})^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}$

故 $\lim_{n\to\infty}(2^{-n}+4^{-n}+5^{-n})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$

例2. (利用结论：$\ln(1+x)\le x$)

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\le 0$，故 x_n 单调递减

$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \ge \ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n+\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{n}>0$ 　　故 x_n 有下界

所以 x_n 收敛

例3. 令 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$，则 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 单调增

则 $f_n(x_n)=0$，$(\forall n\in N_+)$

$f_{n+1}(0)=-1<0$

$f_{n+1}(x_n)=x_n+\cdots+x_n^n+x_n^{n+1}-1=f_n(x_n)+x_n^{n+1}=x_n^{n+1}>0$

故 $x_{n+1}\in(0,x_n)$

所以 $\{x_n\}$ 单减，设 $x_n\to L$

$0<x_2<1$，当 $n\ge 2$ 时 $0<x_n\le x_2$，所以 $1-x_n^n\to 1$

$\because f_n(x_n)=x_n+\cdots+x_n^n-1=\frac{x_n}{1-x_n}(1-x_n^n)-1 \to \frac{L}{1-L}-1$

而 $f_n(x_n)\equiv 0$，故 $\frac{L}{1-L}-1=0$

所以 $L=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$

例4. $0\le x_{n+1}<x_n+\frac{1}{n^2}\le x_n+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$\therefore 0\le x_{n+1}+\frac{1}{n}<x_n+\frac{1}{n-1}$

$\{x_n+\frac{1}{n-1}\}_{n\ge 2}$ 为单减数列

所以 $\{x_n+\frac{1}{n-1}\}$ 有极限，又 $\{\frac{1}{n-1}\}$ 有极限，故 $\{x_n\}$ 有极限

例15：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}-1\right)n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left[n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)+n(\sqrt[n]{c}-1)\right]}$

$=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=(abc)^{\frac{1}{3}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+n}-\sqrt{n^2+n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left[\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]-n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\right]$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\tan\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\frac{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}{1+\frac{a}{n}\frac{a}{n+1}}=a$

例16、$0\le|x_{n+1}-2|=|\sqrt{2+x_n}-2|=\frac{|x_n-2|}{|\sqrt{2+x_n}+2|}\le\frac{|x_n-2|}{2}\le\frac{|x_{n-1}-2|}{4}\le\cdots\le\frac{|x_1-2|}{2^n}\to 0$

故 $|x_n-2|\to 0$，$x_n\to 2$

例17. 设 $L=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$ （易知 $x_n\ge 0$）

$0\le|x_{n+1}-L|=\left|-\frac{L(x_n-L)}{1+x_n}\right|\le|L|\cdot|x_n-L|\le|L|^2|x_{n-1}-L|\le\cdots\le|L|^n|x_1-L|\to 0$

故 $|x_n-L|\to 0$，$\therefore x_n\to\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

例18. 先证：$\forall n$，有 $a_n\in(1,\lambda)$

$a_1=a=\lambda^{\frac{1}{\lambda}}\in(1,\lambda)$

若 $a_n\in(1,\lambda)$ $\quad a_{n+1}=a^{a_n}\in(a^1,a^\lambda)\subseteq(1,\lambda)$

综上 $\forall n$，$a_n\in(1,\lambda)$

$\because a^x$ 为单增函数，故 $\{a_n\}$ 为单调数列

故 存在 L，使 $a_n\to L\in[1,\lambda]$

可证 $x=a^x$ 在 $x\in[1,\lambda]$ 只有 $x=\lambda$ 一个解

综上：$a_n\to\lambda$