

“数学外卖” 高数组函数与极限讲义

赵思铭 李昕澎

日期: October 13, 2024

1. 数列极限

例 1. 求极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right). \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{-n} + 4^{-n} + 5^{-n})^{\frac{1}{n}}.$$

例 2. 求证数列 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 收敛.

例 3. 对每个正整数 n , 用 x_n 表示方程 $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ 在闭区间 $[0, 1]$ 中的根, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

例 4. x_n 为非负数列, 满足 $0 \leq x_{n+1} < x_n + \frac{1}{n^2}$, 证明 x_n 收敛.

例 5. 求极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n \quad (a, b, c \in \mathbb{R}_+).$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n^2 + n} - \sqrt{n^2 + n}).$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right).$$

例 6. 设 $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

例 7. 设 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

例 8. 设 $1 < \lambda < e, a = \lambda^{\frac{1}{\lambda}}, a_1 = a, a_2 = a^{a_1}, \cdots, a_{n+1} = a^{a_n}, \cdots$, 试问 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 是否存在? 若存在,

求出其极限值.

2. 函数极限与连续

例 1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

例 2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n! x^n - \sin x \sin 2x \cdots \sin nx}{x^{n+2}}$.

例 3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \sin x - \sin x \ln x}{x^3 \ln x}$.

例 4. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^{\frac{1}{x}}}{x - e^{\frac{1}{x}}} + \frac{3}{\pi} \arctan \frac{1}{x}$. (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + e^{\frac{1}{x}}}{x - e^{\frac{1}{x}}} + \frac{3}{\pi} \arctan \frac{1}{x}$.

例 5. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+7}, & -\infty < x < -7 \\ x, & -7 \leq x \leq 1 \\ (x-1) \sin \frac{1}{x-1}, & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

所表示曲线的渐近线.

例 6. 求 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1) \ln(|x|)}$ 的间断点.

例 7. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$.

例 8. 求极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

例 9. 设 $f(x), g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义, 且 $\forall x \in U, f(x) \neq g(x)$, 且满足

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = a > 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x)]^{g(x)} - [g(x)]^{g(x)}}{f(x) - g(x)}$.

