数学外卖-导数与微分

李长浩　何山

2024 年 10 月 19 日

第一部分　导数的概念

例题 1 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

试讨论 $f(x)$ 的连续性、可导性及导函数的连续性.

例题 2 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分必要条件是（　　）.

(A) $f(a)=0, f'(a)=0$　　*(B)* $f(a)=0, f'(a)\neq 0$

(C) $f(a)\neq 0, f'(a)=0$　　*(D)* $f(a)\neq 0, f'(a)\neq 0$

例题 3 求函数 $f(x)=(x^2-5x+6)|x^3-3x^2+2x|$ 的不可导点.

例题 4 解答下列问题.

(1) 设 $a<b$，并且设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是可微函数. 如果对所有的 $x\in[a,b]$ 均有 $f'(x)>0$，证明 f 是严格单调递增的.

(2) 再问，对于 $f:X\to\mathbb{R}, X\subseteq\mathbb{R}$，$f$ 在 X 上可微，且对所有的 $x\in X$ 均有 $f'(x)>0$，问 f 是否是严格单调递增的？如果是，请给出证明；如果不是，请举出反例.

例题 5 设 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-2}{x-a}=3$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}=$__________.

例题 6 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$，则下列正确的是（　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=3$　　*(B)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=6$　　*(C)* $f''(0)=0$　　*(D)* $f'''(0)=6$

例题 7 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $\Delta f(1)$ 是 $f(x)$ 在增量为 Δx 时的函数值增量,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(1)-\mathrm{d}f(1)}{\Delta x}=$ (　　).

(A) $f'(1)$　　*(B)* 1　　*(C)* ∞　　*(D)* 0

第二部分　导数的计算

例题 8 设 $y=\ln^3(\sin^2 x+1)$，求 y'.

例题 9 证明：$(x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}$，$n=0,1,\cdots$.

例题 10 由方程 $x^y=y^x$ 确定了 y 关于 x 的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

例题 11 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+\sin t,\\ y=\arctan(t-1)\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$__________.

例题 12 求 $y=\dfrac{5}{2+3x-2x^2}$ 的 n 阶导数，n 为正整数.

例题 13 设 $y=(x^3-1)^9\mathrm{e}^{2x}$，求 $y^{(10)}(1)$.

例题 14 解答下列问题.

1. 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$；
2. 设 $g(x)=\arcsin x$，求 $g^{(n)}(0)$.

感谢参加我们的讲座！麻烦填写一下反馈问卷，帮助我们之后更好地开展活动，谢谢！

外卖讲座反馈问卷

外卖官网：tongjimath.github.io
Bilibili：一题 _ 撬动数学