“数学外卖”高数组定积分讲义

王衡宇　李长浩　戴云舒　薛冰　黄博琳　吴天昊

2024 年 12 月 7 日

例 1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n-1}{n}\pi+\sin\dfrac{n}{n}\pi\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n^2}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{1^\alpha+\cdots+n^\alpha}{1^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}}\quad(\alpha>0)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2+1}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k}{n}\sin\dfrac{k}{n^2}$

例 2. 计算下列定积分.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln^n x\,\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{6x(x^2+\sin x)}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(8) $\displaystyle\int_0^{8\pi} x\sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}\,\mathrm{d}x$

例 3. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\displaystyle\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u}$

(2) 设 f 为连续函数且 $f(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\displaystyle\int_1^x\left(\int_t^1(t-u)f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t}{(x-1)^3}$.

(3) 设 $f(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x xf(x-t)\,\mathrm{d}t}$.

例 4. 设 $(0,+\infty)$ 上连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\ln x-\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$，求 $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

例 5. 证明下列等式.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

(2) f 在 $(0,+\infty)$ 上连续，$\displaystyle\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

例 6. 计算下列定积分.

(1) n 为大于 1 的正整数，求 $\displaystyle\int_0^n (x-[x])\,\mathrm{d}x$.

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x$.

(3) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$.

例 7. 已知 $f'(x)=\arctan\left[(x-1)^2\right]$，且 $f(0)=0$，求 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

例 8. 计算下列反常积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\tan x)}{(\cos x+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$

例 9. 面积原理：

(1) 利用定积分证明:$\ln n+1\geqslant\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\geqslant\ln(n+1)$.

(2) 计算极限: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}$.

例 10. 设 $f(x)$ 是连续函数. 由 $a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)$ 所表示的区域绕 y 轴旋转一周所成旋转体体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 11. $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的正值可微函数. $f(-x)=f(x)$. 令 $g(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\,\mathrm{d}t, x\in[-a,a],(a>0)$，解决下列问题.

(1) 求证 $g'(x)$ 在 $[-a,a]$ 严格单增；

(2) 求 $g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的最小值点；

(3) 若 $g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上最小值为 $f(a)-a^2-1$，求 $f(x)$.

例 12. 设 n,k 为正整数，且 $1\leqslant k\leqslant n$，证明：

(1) $\dfrac{2}{n}\ln\left(1+\dfrac{k-1}{n}\pi\right)\leqslant\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{2}{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\pi\right)$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\sin nx|\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

例 13. 设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调增函数，证明：$\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

例 14. 设 f 在 $[0,2\pi]$ 上连续. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 15. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 二阶可导 $(a>0)$，且 $f''(x)\geqslant 0$. 证明：

(1) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant af\left(\frac{a}{2}\right)$;

(2) $\displaystyle\int_0^a f(x^2)\,\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{a}{3}\right)$.

例 16. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x$，证明：$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 中至少有两个零点.

感谢参加我们的讲座！麻烦填写一下反馈问卷，帮助我们之后更好地开展活动，谢谢！

外卖讲座反馈问卷

外卖官网：shuxuewaimai.top
Bilibili：一题 _ 撬动数学