

“数学外卖” 高数组期末讲座 2: 积分与微分方程

黄泽昕 邬宗圣 王衡宇 李昕澎 薛冰

2024 年 12 月 29 日

例 1. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 2. $\int_0^\pi x\sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

- 例 3. 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$, $g(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$, 则 ()
- (A) $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数 (B) $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数
(C) $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为奇函数 (D) $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为周期函数

- 例 4. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$, 则 I, J, K 的大小关系为 ()

- (A) $I < J < K$ (B) $I < K < J$ (C) $J < I < K$ (D) $K < J < I$

- 例 5. 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k = 1, 2, 3$), 则有 ()
- (A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_2 < I_1$ (C) $I_2 < I_3 < I_1$ (D) $I_2 < I_1 < I_3$

例 6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x + \int_0^x e^{-t^2} dt \right) \sin^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

- 例 7. 下列反常积分发散的是 ()
- (A) $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ (B) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ (C) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ (D) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

- 例 8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ ()

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$
(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$

例 9. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{k/n}}{n+1/k} = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\ln \frac{1}{n} + 2 \ln \frac{2}{n} + \dots + (n-1) \ln \frac{n-1}{n} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 11. 设 $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x^3-8} = -1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{2n-3}{n}}^{\frac{2n+1}{n}} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 12. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 x^2 f(x) dx$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 13. 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

例 14. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) - f(x) = x$, $\int_0^2 f(x) dx = 0$, 则 $\int_1^3 f(x) dx =$ _____.

例 15. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t \left(\int_y^t f(x) dx \right) dy$, 试求 $F'(2)$.

例 16. 已知 $f(x) = x - \int_0^\pi f(x) \cos x dx$, 则 $\int_0^\pi f(x) \sin^4 x dx =$ _____.

例 17. 如果对微分方程 $y'' - 2ay' + (a+2)y = 0$ 的任一解 $y(x)$, 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 均收敛, 则 a 的取值范围是 ()

- (A) $(-2, -1]$ (B) $(-\infty, -1]$ (C) $(-2, 0)$ (D) $(-\infty, 0)$

例 18. 求方程 $y'' + 2y' - 3y = e^{2x} + 3x$ 的通解.

例 19. 若 $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 则 $q(x) =$ ()

- (A) $3x(1+x^2)$ (B) $-3x(1+x^2)$ (C) $\frac{x}{1+x^2}$ (D) $-\frac{x}{1+x^2}$

例 20. 设曲线 $y = \sqrt{x-2}$ 与它在点 $(3, 1)$ 处的切线, 以及 x 轴所围成的平面图形为 A .

- (1) 求 A 绕 x 轴一周所形成的旋转体体积;
- (2) 求 A 绕 y 轴一周所形成的旋转体体积.

例 21. 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

例 22. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n^2} \frac{n}{n^2 + j^2} =$ _____.

感谢参加我们的讲座! 麻烦填写一下反馈问卷, 帮助我们之后更好地开展活动, 谢谢!



外卖讲座反馈问卷

外卖官网: tongjishuxuewaimai.top

Bilibili: 一题 _ 撬动数学