"数学外卖"高数组期末讲座 2: 积分与微分方程

黄泽昕　邬宗圣　王衡宇　李昕澎　薛冰

2024 年 12 月 29 日

例 1. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x =$__________.

例 2. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x}\,\mathrm{d}x =$__________.

例 3. 已知函数 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{\cos t}\,\mathrm{d}t$，$g(x)=\int_0^{\sin x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$，则（　　）

(A) $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数　　(B) $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数

(C) $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为奇函数　　(D) $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为周期函数

例 4. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\,\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系为 (　　)

(A) I<J<K　　(B) I<K<J　　(C) J<I<K　　(D) K<J<I

例 5. 设 $I_k=\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x\ (k=1,2,3)$，则有（　　）

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$　　(C) $I_2<I_3<I_1$　　(D) $I_2<I_1<I_3$

例 6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x+\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\sin^2 x\,\mathrm{d}x=$__________.

例 7. 下列反常积分发散的是（　　）

(A) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (B) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (C) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (D) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

例 8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x =$ (　　)

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

例 9. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\mathrm{e}^{k/n}}{n+1/k}=$__________.

例 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\ln\dfrac{1}{n}+2\ln\dfrac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\dfrac{n-1}{n}\right]=$__________.

例 11. 设 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x^3-8}=-1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_{\frac{2n-3}{n}}^{\frac{2n+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x=$__________.

例 12. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{1+x^2}\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$__________.

例 13. 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则 $f(7)=$__________.

例 14. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)-f(x)=x, \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=0$，则 $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=$__________.

例 15. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t\left(\int_y^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$，试求 $F'(2)$.

例 16. 已知 $f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x$，则 $\int_0^{\pi} f(x)\sin^4 x\,\mathrm{d}x=$__________.

例 17. 如果对微分方程 $y''-2ay'+(a+2)y=0$ 的任一解 $y(x)$，反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x$ 均收敛，则 a 的取值范围是（　　）

(A) $(-2,-1]$　　(B) $(-\infty,-1]$　　(C) $(-2,0)$　　(D) $(-\infty,0)$

例 18. 求方程 $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^{2x} + 3x$ 的通解.

例 19. 若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}, y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$（　　）

(A) $3x(1+x^2)$　　(B) $-3x(1+x^2)$　　(C) $\dfrac{x}{1+x^2}$　　(D) $-\dfrac{x}{1+x^2}$

例 20. 设曲线 $y=\sqrt{x-2}$ 与它在点 $(3,1)$ 处的切线，以及 x 轴所围成的平面图形为 A.

(1) 求 A 绕 x 轴一周所形成的旋转体体积;

(2) 求 A 绕 y 轴一周所形成的旋转体体积.

例 21. 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0 \in I$，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0) = 2$，求 $f(x)$ 的表达式.

例 22. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+j^2}=$__________.