期末复习一 —— 极限与一元函数微分解答

何山　赵思铭

2024 年 12 月 28 日

解答中可能会出现笔误等情况, 参考答案时需要加以注意!!!

极限部分

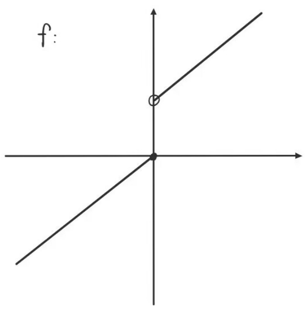
答案 1:

思路:

这里主要工具只能是单调收敛定理 (最多再加以定义验证), 因此先看是否满足定理条件, 不满足再找反例.

解:

a. 事实上这是 f 在某一点连续的等价条件, 因此我们选不连续的 f 即可.

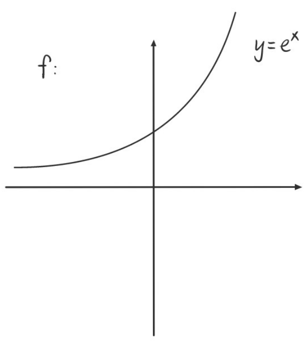


取 $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$.

上述构造的函数是无界函数, 如果要是一个有界函数, 那么我们可以取 $f(x) = sgn(x)$.

b. 容易得到 $f(x_n)$ 单调有界, 从而收敛.

c,d. 容易看出 c,d 不能保持有界性, 原因在于 f^{-1} 不是有界的.



取 $x_n = -n$, $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$.

答案 2:

思路:

因为 $\lim\limits_{x\to e} f(x)$ 就是一个数，因此在式子中令 $x\to e$ 就可以得到这个数的方程.

解：

记 $a=\lim\limits_{x\to e} f(x)$，令 $x\to e$，则有：

$$a=a\cdot\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}+e^{\wedge}\left(\lim_{x\to e}\frac{e}{x-e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)\right),$$

即有 $a=\dfrac{1}{e}+e$，解得 $a=\dfrac{e^2}{e-1}$.

答案 3:

思路：

若能发现式子中有 $(x^n)'$，那么可以用泰勒展开. 若不能，也可用洛必达打开计算.

解：

1. 泰勒展开：

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{n(n-1)a^{n-2}}{2}(x-a)^2+o(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.$$

2. 洛必达：

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{nx^{n-1}-na^{n-1}}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(n-1)x^{n-2}}{2}=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.$$

答案 4:

思路：

由于 f 为三阶的无穷小，因此将 f 泰勒展开三阶.

解：

泰勒展开可以得到：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o_1(x^3)\right]+bx\left[x+o_2(x^2)\right]}{kx^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(a+1)x+(b-\frac{1}{2}a)x^2+\frac{1}{3}ax^3+o(x^3)}{kx^3}=1\end{aligned}.$$

从而有：$a+1=0,\ b-\dfrac{1}{2}a=0,\ \dfrac{1}{3}a=k,$

即：$a=-1,\ b=-\dfrac{1}{2},\ k=-\dfrac{1}{3}.$

答案 5:

思路：

注意四个分式极限存在都能得到分子极限为 0，再结合连续性可以得到 $f(0)$ 的条件，最后再代入导数定义.

解：

① 由题可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|\geq 0$.

若 $f(0)>0$，则存在某领域 $(-\delta,\delta)$，$f(x)>0$，因此：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|-f(0)}{x}\text{存在}.$$

若 $f(0)=0$（注意这个时候分子是非负的），可得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|f(x)|}{x}\geq 0$$

与此同时又有:

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|f(x)|}{x}\leq 0$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{x}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{x}\cdot\dfrac{f(x)}{|f(x)|}=0$, 即导数存在且为 0.

② 由题可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=|f(0)|$.

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-|f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 存在.

③ 由题可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|\cdot\dfrac{f(x)}{|f(x)|}=0$,

此时与 ① 中情形相同.

④ 由题可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=|f(0)|$.

若 $f(0)\geq 0$, 此时与 ① 中情形相同.

若 $f(0)<0$, 则可以去掉绝对值化为导数的定义的情况.

答案 6:

思路:

回顾高数课本出现的概念, 大致有: 可导 $\to$ 连续 $\to$ 可积 $\to$ 有界, 再考虑剩下的性质.

以下是 *8* 个选项所对应的性质:

A 为 $R[a,b]$,B 为 $D[a,b]$,C 为 $C^1[a,b]$,D 为 $C[a,b]$,E 为一致连续,F 为 $B[a,b]$,G 为 *Lipschitz* 连续,H 为有原函数.

解:

① $A\not\to H$:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,\frac{1}{2})\\ 0 & x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

② $H\not\to A$:

$$F(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\text{且}x\in[-1,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$$

取 $f(x)=F'(x)$, $x\in[-1,1]$, 容易得到 f 无界, 从而是不可积的.

总之, 彼此之间的联系如下图所示:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r] & B \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr] & A \arrow[r] & F \\
 & G \arrow[ur] & E & H &
\end{tikzcd}$$

答案 7:

思路:

按照公式操作即可, 注意如何对变上限积分求导.

解:

可知: $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+2t}$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1$.

于是在第二个式子中对 t 求导, 可得:

$$2-e^{-(y+t^2)^2}\cdot(\frac{dy}{dt}+2t)=0,$$

代入 $t=0$, 可得:

$$2-e^{-y^2|_{t=0}}\cdot\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0,$$

在第二个式子中令 $t=0$ 有:

$$\int_1^{y|_{t=0}}e^{-u^2}\,du=0,$$

于是 $y|_{t=0}=1$, 解得 $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=2\,e$. 从而 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}\cdot\left.\dfrac{dt}{dx}\right|_{t=0}=2\,e$.

答案 8:

思路:

遇到 $f(x)^{g(x)}$, 都化为 $e^{g(x)\ln f(x)}$ 讨论, 但本题还需要单独讨论 $x=0$.

解:

可以知道的是, 当 $x=0$ 时,$f(x)$ 是没有意义的.

从而 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

而 $f(x)=e^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}\ln|x|}$, 需要讨论在每一个间断点左右的极限.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty=\lim_{x\to0^+}f(x)\ \to\ x=0\text{为第二类}.$$

注意 $x\to1$ 时,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln|x|}{1-x}=-1$, 从而可得:

$$\lim_{x\to1}f(x)=e\ \to\ x=1\text{可去}.$$

而在 $x\to2$ 时有:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to\ x=2\text{为第二类}.$$

综上, 第一类间断点的个数为 1.

答案 9:

思路:

讨论竖直, 水平或者斜渐近线这三种情况, 注意正负无穷需要分开讨论.

解:

无竖直渐近线.

水平或者斜渐近线正负无穷处斜率为:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}}{x}=1,\ k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}}{x}=1.$$

再计算在正无穷处渐近线的截距:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-k_1x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-x \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3}-1\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{3}(-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}) \\
&= -1
\end{aligned}
$$

类似的，在负无穷处渐近线的截距 $b_2=-1$.

综上可知，其只有一条渐近线，即 $y=x-1$.

答案 10:

思路：

求一阶导和二阶导，看 0 附近的符号，再结合函数的奇偶性.

解：

可分别得到 f 和 g 的一，二阶导数：

$$f'(x)=e^{x^2}\sin x,$$

$$f''(x)=(\cos x+2x\sin x)\,e^{x^2},$$

$$g'(x)=e^{x^2}\sin^2 x+\int_0^x e^{t^2}\,dt\cdot\sin 2x,$$

$$g''(x)=(\sin 2x+2x\sin^2(x^2))\,e^{x^2}+e^{x^2}\sin 2x+2\int_0^x e^{t^2}\,dt\cdot\cos 2x$$

并且可知 f 是偶函数,g 是奇函数.

由 $f'(0)=0,\ f''(0)>0$，可知 $x=0$ 是 f 的极小值点，而且不是拐点.

由 $g''(0)=0,\ g'''(0)>0$(其中后者由 g'' 在 0 附近严格单调递增可以知道)，可知 $x=0$ 不是 g 的极值点，但 $(0,0)$ 是拐点.

答案 11:

思路：

y' 不存在时，计算曲率可考虑参数方程，小题则可考虑旋转或者反射.

解：

利用反射，先求 $y=x^2$ 在 $(0,0)$ 处的曲率，则：

$$y'=2x,\ y''=2,\ \kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=2,\ \rho=\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{2}.$$

则 $x^2=y$ 的曲率圆圆心为 $(\frac{1}{2},0)$，半径为 $\rho=\frac{1}{2}$，于是曲率圆的方程为 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$.

微分部分

答案 12:

证：

令 $F(x)=xf(x)+\frac{k}{x}$，其中 $k=\frac{ab}{b-a}[bf(b)-af(a)]$.

可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)$.

于是存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$. 也就是:

$$f(\xi)+f'(\xi)\cdot\xi-\frac{k}{\xi^2}=0.$$

$$\frac{ab}{b-a}[bf(b)-af(a)]=\xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)].$$

答案 13:

(1) 证:

存在 $d_1 \in (a,c)$, $d_2 \in (c,b)$, 使得 $f'(d_1)=f'(d_2)=0$.

由于二阶导存在, 故而 $f'(x)$ 是连续可导的, 故:

存在 $\xi \in (d_1,d_2) \subseteq (a,b)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

(2) 证:

首先可知, 存在 $\eta \in (a,b)$, 使得 $f'(\eta)=0$.

又由于 $f'(a)=0$, 与 *(1)* 一样的, 可知存在 $\xi \in (a,\eta)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

答案 14:

证:

令 $F(x)=e^x(f(x)-x\,e^x+x-1)$, 可知 $F(-1)=F(0)=F(2)=0$.

则存在 $\eta_1 \in (-1,0)$, $\eta_2 \in (0,2)$, 使得:

$$F'(\eta_i)=e^{\eta_i}(f(\eta_i)+f'(\eta_i)-2\eta_i\,e^{\eta_i}-e^{\eta_i}+\eta_i)=0,\ i=1,2.$$

再令 $G(x)=e^{-x}(f'(x)+f(x)-2x\,e^x-e^x+x)$, 则 $G(\eta_1)=G(\eta_2)=0$.

于是存在 $\xi \in (\eta_1,\eta_2) \subseteq (-1,2)$, 使得:

$$G'(\xi)=e^{-x}(f''(\xi)-f(\xi)-2\,e^{\xi}-\xi+1)=0,$$

从而 $f''(\xi)=f(\xi)+2\,e^{\xi}+\xi-1$.

答案 15:

证:

令 $F(x)=f(x)-e^x$, $|f(0)|\le 1-\cos 0=0$, $|f(\pi)|\le \sin\pi=0$.

所以可知:$F(0)=F(\pi)=0$, 于是存在 $\eta \in (0,\pi)$ 使得:

$$F'(\eta)=e^{\eta}(f(\eta)+f'(\eta))=0.$$

$$|f'(0)|=\lim_{t\to 0^+}\left|\frac{f(t)-f(0)}{t}\right| \le \lim_{t\to 0^+}\left|\frac{1-\cos t}{t}\right|=0 \ \to\ f'(0)=0.$$

令 $G(x)=e^{-x}(f(x)+f'(x))$, 则 $G(0)=G(\eta)=0$, 于是存在 $\xi \in (0,\eta)$, 使得:

$$G'(\xi)=e^{-\xi}(f''(\xi)-f(\xi))=0.$$

从而得到:$f''(\xi)=f(\xi)$.

答案 16:

证:

令 $F(x)=arctanf(x)-x$, 则 $F(0)=F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, 于是存在 $\eta \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, 使得:

$$F'(\eta)=\frac{f'(\eta)-f^2(\eta)-1}{f^2(\eta)+1}$$

令 $G(x)=f'(x)-f^2(x)$, 则 $G(0)=G(\eta)=1$, 于是存在 $\xi\in(0,\eta)\subseteq\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, 使得

$$G'(\xi)=f''(\xi)-2f(\xi)f'(\xi)=0$$

从而得到:$f''(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)$.

答案 17:

证:

令 $F(x)=\dfrac{f(x)+e^{x/2}\sin\frac{x}{2}-x^2}{e^{x/2}\cos\frac{x}{2}}$, 则 $F(0)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. 从而存在 $\eta\in\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得:

$$F'(\eta)=\frac{(f'(\eta)-2\eta)\cos\frac{\eta}{2}-\frac{1}{2}(\cos\frac{\eta}{2}-\sin\frac{\eta}{2})(f(\eta)-\eta^2)}{e^{x/2}\cos^2\frac{x}{2}}=0.$$

令 $G(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left[(f'(x)-2x)\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2})(f(x)-x^2)\right]$,

可知 $G\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=G(\eta)=0$, 故存在 $\xi\in\left(\eta,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 使得:$G'(\xi)=0$.

从而便有:

$$2f''(\xi)-2f'(\xi)+f(\xi)=\xi^2-4\xi+4.$$

答案 18:

证:

令 $F(x)=f(x)-e^x-f(1-x)+e^{1-x}$, 则 $F(0)=F\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, 于是存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, 使得:

$$F'(\xi)=f'(\xi)-e^{\xi}+f(1-\xi)-e^{1-\xi}=0,$$

取 $\eta=1-\xi$, 即可得到:$f'(\xi)+f'(\eta)=e^{\xi}+e^{\eta}$.

答案 19:

证:

令 $g(x)=f(x)+8x^2-8x$, 于是 $\min\limits_{0\le x\le 1}f''(x)\le -16$ 则转化为证 $\min\limits_{0\le x\le 1}g''(x)\le 0$.

而可以发现的是:$g(1)=g(0)=0$, $\max\limits_{0\le x\le 1}g(x)\ge\max\limits_{0\le x\le 1}(f(x)+8x^2-8x)\ge 0$.

1. 若 $\max\limits_{0\le x\le 1}g(x)>0$, 设最大值在 η 取到, 于是有 $g'(\eta)=0$.

则存在 $\xi_1\in(0,\eta)$, $\eta_2\in(\eta,1)$, 使得:

$$g'(\xi_1)=\frac{g(\eta)-g(0)}{\eta}>0,\ g'(\xi_2)=\frac{g(1)-g(\eta)}{1-\eta}<0.$$

所以存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得

$$g''(\xi)=\frac{g'(\xi_2)-g'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0\ \rightarrow\ \min_{0\le x\le 1}g''(x)\le 0.$$

2. 若 $\max\limits_{0\le x\le 1}g(x)=0$, 则 $g'(0)\le 0$, $g'(1)\ge 0$, 于是存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$g''(\xi)=\frac{g'(\xi_2)-g'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0\ \rightarrow\ \min_{0\le x\le 1}g''(x)\le 0.$$

答案 20:

本题是一道考研题 (据说是这样的), 而实际上的考点是严格下凸函数 $(f''>0)$, 因此大家可以画一个 $y=x^2$ 的图像去辅助理解下面的过程, 于是下面的分式实际上都是割线的斜率了.

必要性:

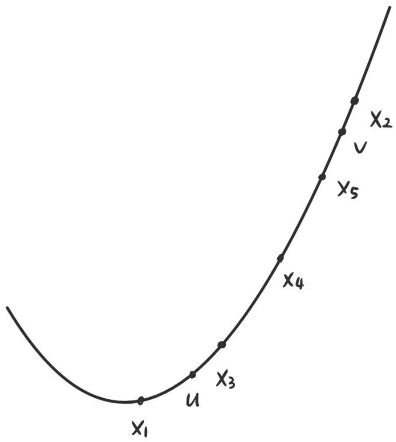
对于任意的 $x_1 < x_2 < x_3$，存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2)$，$\xi_2 \in (x_2, x_3)$，使得:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

充分性

对于任意的 $x_1 < x_2$，设 $x_3 = \dfrac{3x_1 + x_2}{4}$，$x_4 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，$x_5 = \dfrac{x_1 + 3x_2}{4}$.

也就是有:$x_1 < x_3 < x_4 < x_5 < x_2$，且相邻两点的距离是相同的.



则对于任意 $u \in (x_1, x_3)$，$v \in (x_5, x_2)$，由条件可得到:

$$\frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} < \frac{f(x_3) - f(u)}{x_3 - u} < \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} < \frac{f(x_5) - f(x_4)}{x_5 - x_4} < \frac{f(v) - f(x_5)}{v - x_5} < \frac{f(x_2) - f(v)}{x_2 - v}.$$

所以:

$$f'(x_1) = \lim_{u \to x_1^+} \frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} \leq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} < \frac{f(x_5) - f(x_4)}{x_5 - x_4} \leq \lim_{v \to x_2^-} \frac{f(v) - f(x_2)}{v - x_2} = f'(x_2).$$

注: 在此题中我们在 x_1 和 x_2 中插入三个点而不是一个点，是为了得到结果中的严格小于号，否则我们只能得到 $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

答案 21:

解:

可知:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) \\ &= x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \cdots \\ &= 3!\frac{x^3}{3!} - 2 \cdot 4! \cdot \frac{x^4}{4!} + 3 \cdot 5! \cdot \frac{x^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

所以得到:$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n!}{n-2}$.