期末复习一 —— 极限与一元函数微分

何山　赵思铭　刘欣晨　解淑涵　戴云舒

2024 年 12 月 28 日

Part 1. 极限

例题 1. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为一数列, 判断下列说法正误, 并简要说明理由.

A. 若$\{x_n\}$收敛, 则$\{f(x_n)\}$收敛.

B. 若$\{x_n\}$单调, 则$\{f(x_n)\}$收敛.

C. 若$\{f(x_n)\}$收敛, 则$\{x_n\}$收敛.

D. 若$\{f(x_n)\}$单调, 则$\{x_n\}$收敛.

例题 2. 已知极限 $\lim\limits_{x\to e} f(x)$ 存在，且函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)=\frac{\ln x-1}{x-e}\lim_{x\to e} f(x)+\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}},$$

则 $\lim\limits_{x\to e} f(x)=$ ____________.

例题 3. 求极限

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}.$$

例题 4. 设函数 $f(x) = x + a\ln(1+x) + bx\sin x, g(x) = kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \to 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

例题 5. 设函数 $f(x)$ 连续, 给出下列四个条件:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-f(0)}{x}$存在; ② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-|f(0)|}{x}$存在;

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{x}$存在; ④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$存在;

其中能得到“$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导”的条件个数是 (　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

例题 6. 在闭区间 $[a,b]$ 上, 用 $\to$ 与 $\leftrightarrow$ 连接下列概念的逻辑关系.

A. $\int_a^b f(x)dx$存在.

B. $f(x)$可导.

C. $f(x)$连续可微

D. $f(x)$连续.

E. $f(x)$一致连续

F. $f(x)$有界.

G. $|f(x_1)-f(x_2)| \leq \frac{2}{3}|x_1-x_2|$

H. $f(x)$有原函数.

例题 7. 已知函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln(1+2t) \\ 2t-\displaystyle\int_1^{y+t^2} e^{-u^2}\,du=0 \end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$ ____________.

例题 8. 函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数为 ________.

例题 9. 曲线 $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1}$ 的渐近线方程为 __________.

例题 10. 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt$, $g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin^2 x$, 则 (　　)

A. $x=0$是$f(x)$的极值点, 也是$g(x)$的极值点.

B. $x=0$是$f(x)$的极值点, $(0,0)$是曲线$y=g(x)$的拐点.

C. $x=0$是$f(x)$的极值点, $(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点.

D. $(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点, 也是曲线$y=g(x)$的拐点

例题 11. 曲线 $y^2 = x$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率圆方程为 ___________.

Part 2. 一元函数微分

例题 12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导,$0<a<b$.

证明: 存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得:

$$\frac{ab}{b-a}[bf(b)-af(a)]=\xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)].$$

例题 13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a)=f(b)$,

(1) 若存在 $a<c<b$, 使得 $f(c)=f(a)=f(b)$, 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=0$.

(2) 若 $f'(a)=0$, 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

例题 14. 设 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上二阶可导, 且 $f(-1)=2-e^{-1}, f(0)=1, f(2)=2e^2-1$.

证明: 存在 $\xi\in(-1,2)$, 使得 $f''(\xi)=f(\xi)+2e^{\xi}+\xi-1$.

例题 15. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq min\{1-\cos x, \sin x\}$.

证明: 存在 $\xi \in (0,\pi)$ 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

例题 16. 设 $f(x)$ 二阶可导且 $f(0)=0, f'(0)=1, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

证明: 存在 $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 使得 $f''(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)$.

例题 17. 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上二阶可导，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}, f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi, f(0)=1.$

证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得：

$$2f''(\xi)-2f'(\xi)+f(\xi)=\xi^2-4\xi+4.$$

例题 18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=1, f(1)=e$.

证明: 存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right), \eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, 使得:$f'(\xi)+f'(\eta)=e^{\xi}+e^{\eta}$.

例题 19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且 $f(1)=f(0)=0, \max\limits_{0\le x\le 1} f(x)=2$.

证明: $\min\limits_{0\le x\le 1} f''(x)\le -16$.

例题 20. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导.

证明:$f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递增的充分必要条件是: 对 (a,b) 内任意的 x_1, x_2, x_3, 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, 有:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

例题 21. 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ $(n \geq 3)$.