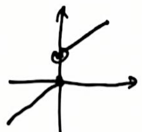
同济大学
TONGJI UNIVERSITY
SHANGHAI
PEOPLE'S REPUBLIC OF CHINA

讲义解答：

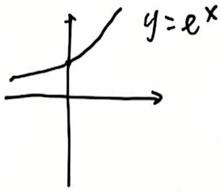
1. 思路：这里主要工具只能是单调收敛定理（最多还可能用定义验证）
因此先看是否满足定理条件，若不满足再找反例：

解：a. 事实上这是 f 在某一点连续的等价条件，因此我们选不连续的 f 即可。

f:  $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}, \forall n\in N_{>0}$.

b. 容易得到 $f(x_n)$ 单调有界，从而收敛

c. d：容易看出 c d 条件不能保持有界性，原因在于 f^{-1} 不是有界的。

f: 

$x_n=-n, \forall n\in N_{>0}$.

2. 思路：$\lim\limits_{x\to e} f(x)$ 就是一个数，再在式子中令 $x\to e$ 就可以得到这个数的方程：

解：记 $a=\lim\limits_{x\to e} f(x)$，令 $x\to e$，则有：

$$a=a\cdot\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}+\lim_{x\to e} e^{\frac{e}{x-e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)}$$

即 $a=\frac{1}{e}a+e$，解得 $a=\frac{e^2}{e-1}$.

3. 思路：若能发现式子中有 $(x^n)'$，那么可用泰勒展开
若不能，也可用洛必达打开计算。

解：① $$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{n(n-1)a^{n-2}}{2}(x-a)^2+o(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.$$

②

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{nx^{n-1}-na^{n-1}}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.$$

4. 思路：由于 g 为三阶的无穷小，因此将 f 直接泰勒展开到三阶

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)]+bx(x+o(x^2))}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+1)x+(b-\frac{1}{2}a)x^2+\frac{1}{3}ax^3+o(x^3)}{kx^3}=1.$$

从而 $\begin{cases}a+1=0\\ b-\frac{1}{2}a=0\\ \frac{1}{3}a=k\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1\\ b=-\frac{1}{2}\\ k=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

5. 思路：注意四个分式极限存在都能得到分子极限为0，
再结合连续性可以得到 $f(0)$ 的条件，最后再代入导数定义。

解：① 由题可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|\geq 0$.

若 $f(0)>0$，则存在某邻域 $(-\delta,\delta)$，$f(x)>0$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|-f(0)}{x}\ \text{存在}.$$

注意这个时候分子非负！ ⟵ 若 $f(0)=0$，可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|f(x)|}{x}\geq 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|f(x)|}{x}\leq 0$.

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x}\cdot\frac{f(x)}{|f(x)|}=0$，即导数存在且为0.

② 由题可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=|f(0)|$，

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-|f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 存在

③ 由题可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|\cdot\frac{f(x)}{|f(x)|}=0$.

此时5 ①中情形完全相同.

④ 由题可得 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=|f(0)|$，此时情形5 ①相同.
$\qquad\qquad\qquad\quad \| $
$\qquad\qquad\qquad\quad f(0)$.

[illegible]. 思路：按照公式操作即可，注意如何对变上限积分求导.

解：$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+2t}$，$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1$.

对②式对 t 求导，可得

$$2-e^{-(y+t^2)^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}+2t\right)=0.$$

代入 $t=0$，可得：$2-e^{-y^2|_{t=0}}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0$.

在②式中，令 $t=0$，可得 $\int_1^{y|_{t=0}}e^{-u^2}du=0$.

从而 $y|_{t=0}=0$，解得 $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=2$.

6. 思路：回顾高数课本出现的概念，大致有 ~~有界 ⟹ 可积 ⟹~~
可导 → 连续 → 可积 → 有界，再考虑剩下的性质

解：

$C'[a,b]$ $D[a,b]$ $C[a,b]$ $R[a,b]$ $B[a,b]$.

C → B → D → A → F

G → D ↔ E，D → H 有原函数

G：Lipschitz连续　E：一致连续.

① $A \not\Rightarrow H$：$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,\frac{1}{2})\\ 0 & x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$.

② $H \not\Rightarrow A$：$F(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \text{ 且 } x\in[-1,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$

$f(x)=F'(x)$，$x\in[-1,1]$.

容易得到 f 无界，从而不可积.

同濟大學
TONGJI UNIVERSITY
SHANGHAI
PEOPLE'S REPUBLIC OF CHINA

8. 思路：遇到 $f(x)^{g(x)}$，都化为 $e^{g(x)\ln f(x)}$ 讨论，但本题中需单独讨论 $x=0$.

解：$x=0$ 时，$f(x)=0^{-\frac{1}{2}}$，没有定义。
从而 f 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

$f(x)=e^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}\ln|x|}$，讨论每个间断点左右极限.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}\ln|x|}=0$，同理有 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$. —— $x=0$ 可去.

注意 $x\to1$ 时，$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln|x|}{1-x}=-1$，从而可得 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=e^{-1\times(-1)}=e$ —— $x=1$ 可去

$x\to2$ 时，分 2^+，2^- 讨论.

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} e^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}\ln|x|}=0$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-} e^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}\ln|x|}=+\infty$ —— $x=2$ 第二类.

综上，第一类间断点个数为2.

9. 思路：讨论竖直，以及水平/斜渐近线三种情况，注意正负无穷需分开讨论.

解：无竖直渐近线.

$k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}}{x}=1$. $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\cdots=1$

$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-k_1x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-x$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\left(1-3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{3}\left(-3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=-1$.

同理 $b_2=-1$，则只有一条渐近线 $y=x-1$.

10. 思路：求1阶与2阶导，看0附近的符号，再结合函数的奇偶性

解：$f'(x)=e^{x^2}\sin x$. $f''(x)=(\cos x+2x\sin x)e^{x^2}$

$g'(x)=e^{x^2}\sin^2x+\int_0^x e^{t^2}dt\,\sin2x$，$g''(x)=(\sin2x+2x\sin x^2)e^{x^2}+e^{x^2}\sin2x+\int_0^x e^{t^2}dt\cdots$

f 偶，g 奇，由 $f'(0)=0$. $f''(0)=1>0$. $x=0$ 是 f 极小值点，非拐点.

由 $g''(0)=0$，且 $g'''(0)>0$，则 $x=0$ 非 g 极值点，是 g 拐点.

(g'' 在0附近严格单增)

11. 思路：y' 不存在时，计算曲率可考虑参数方程，小题则可考虑旋转或反射.

解：即 $y=x^2$ 在 $(0,0)$ 处曲率，$y'=2x$. $y''=2$，$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=2$. $\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}$.

则 $x^2=y$ 的曲率圆 圆心：$(\frac{1}{2},0)$，半径 $\rho=\frac{1}{2}$，方程 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$.