设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，$0<a<b$，证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得
$\frac{ab}{b-a}[bf(b)-af(a)]=\xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)]$.

证：令 $F(x)=xf(x)+\frac{k}{x}$　　其中，$k=\frac{ab}{b-a}[bf(b)-af(a)]$

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导

$F(a)=F(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$

$\Rightarrow\ f(\xi)+f'(\xi)\xi-\frac{k}{\xi^2}=0$

$\Rightarrow \frac{ab}{b-a}[bf(b)-af(a)]=\xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)]$

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，$f(a)=f(b)$，

(1) 存在 $a<c<b$，使得 $f(c)=f(a)=f(b)$，求证存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=0$

(2) $f'(a)=0$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=0$

(1) 证：$\exists\ d_1\in(a,c)$，$d_2\in(c,b)$ 使得 $f'(d_1)=f'(d_2)=0$

$\Rightarrow \exists\ \xi\in(d_1,d_2)\subseteq(a,b)$ 使使 $f''(\xi)=0$

(2) 证 $\exists\ \eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)=0$，$\exists\ \xi\in(a,\eta)$ s.t. $f''(\xi)=0$

设 $f$ 在 $[-1,2]$ 上二阶可导且 $f(-1)=2-e^{-1}$，$f(0)=1$，$f(2)=2e^2-1$，证明存在
$\xi\in(-1,2)$ 使得 $f''(\xi)=f(\xi)+2e^{\xi}+\xi-1$

证：令 $F(x)=(f(x)-xe^x+x-1)e^x \Rightarrow F(-1)=F(0)=F(2)=0$

则存在 $\eta_1\in(-1,0)$，$\eta_2\in(0,2)$ 使得 $0=F'(\eta_i)=e^x(f'(\eta_i)+f(\eta_i)-2\eta_ie^{\eta_i}-e^{\eta_i}+\eta_i)$

令 $G(x)=e^{-x}(f'(x)+f(x)-2xe^x-e^x+x)$

则 $G(\eta_1)=G(\eta_2)=0$

则存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subseteq(-1,2)$ 使得 $0=G'(\xi)=e^{-x}(f''(\xi)-f(\xi)-2e^{\xi}-\xi+1)$

从而 $f''(\xi)=f(\xi)+2e^{\xi}+\xi-1$

设在 $[0,\pi]$ 上 $f$ 二阶可导且 $|f(x)| \le \min\{1-\cos x, \sin x\}$，证明存在 $\xi \in (0,\pi)$ 使得 $f''(\xi)=f(\xi)$

证：令 $F(x)=f(x)\cdot e^{x}$，$|f(0)| \le 1-\cos 0 = 0$，$|f(\pi)| \le \sin\pi = 0$

所以 $F(0)=F(\pi)=0$ $\Rightarrow \exists\, \eta \in (0,\pi)$ 使得 $0=F'(\eta)=e^{\eta}(f(\eta)+f'(\eta))$

$|f'(0)| = \lim\limits_{t\to 0^+}\left|\frac{f(t)-f(0)}{t}\right| \le \lim\limits_{t\to 0^+}\left|\frac{1-\cos t}{t}\right| = 0 \Rightarrow f'(0)=0$

令 $G(x)=e^{-x}(f(x)+f'(x))$，则 $G(0)=G(\eta)=0$

则存在 $\xi \in (0,\eta)$ 使 $0=G'(\xi)=e^{-\xi}(f''(\xi)-f(\xi))$

所以 $f''(\xi)=f(\xi)$

设 $f$ 二阶可导且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f(\frac{\pi}{4})=1$，证明存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$，使得 $f''(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)$

证：令 $F(x)=\arctan f(x)-x$

则 $F(0)=F(\frac{\pi}{4})=0$ 则 $\exists\,\eta\in(0,\frac{\pi}{4})$ 使 $0=F'(\eta)=\frac{f'(\eta)-f^2(\eta)-1}{f^2(\eta)+1}$

令 $G(x)=f'(x)-f^2(x)$，则 $G(0)=G'(\eta)=1$

$\Rightarrow \exists\,\xi\in(0,\eta)\subseteq(0,\frac{\pi}{4})$ 使得 $0=G(\xi)=f''(\xi)-2f(\xi)f'(\xi)$

$\Rightarrow f''(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)$

设函数 $f$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上二阶可导，并满足 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}$，$f'(\frac{\pi}{2})=\pi$，$f(0)=1$，证明存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$ 使得

$$2f''(\xi)-2f'(\xi)+f(\xi)=\xi^2-4\xi+4$$

证：令 $F(x)=\dfrac{f(x)+e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}-x^2}{e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}}$ 则 $F(0)=F(\frac{\pi}{2})=1$

故 $\exists\,\eta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 使 $0=F'(\eta)=\dfrac{(f'(\eta)-2\eta)\cos\frac{\eta}{2}-\frac{1}{2}(\cos\frac{\eta}{2}-\sin\frac{\eta}{2})(f(\eta)-\eta^2)}{e^{\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}}=0$

令 $G(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left[(f'(x)-2x)\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})(f(x)-x^2)\right]$

则 $G(\frac{\pi}{2})=G(\eta)=0$ 故存在 $\xi\in(\eta,\frac{\pi}{2})$ 使得 $G'(\xi)=0$

$\Updownarrow$

$2f''(\xi)-2f'(\xi)+f(\xi)=\xi^2-4\xi+4$

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=1$，$f(1)=e$，证明：存在$\xi\in(0,\frac{1}{2})$，$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=e^{\xi}+e^{\eta}$

证：令 $F(x)=f(x)-e^{x}-f(1-x)+e^{1-x}$，则 $F(0)=F(\frac{1}{2})=0$

则 $\exists\xi\in(0,\frac{1}{2})$ 使得 $0=F'(\xi)=f'(\xi)-e^{\xi}+f'(1-\xi)-e^{1-\xi}$，

取 $\eta=1-\xi$，即得 $f'(\xi)+f'(\eta)=e^{\xi}+e^{\eta}$

设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数，且 $f(1)=f(0)=0$，$\max\limits_{0\le x\le 1}f(x)=2$，证明：$\min\limits_{0\le x\le 1}f''(x)\le -16$

证：令 $g(x)=f(x)+8x^2-8x$

则 $\min\limits_{0\le x\le 1}f''(x)\le -16 \Leftrightarrow \min\limits_{0\le x\le 1}g''(x)\le 0$

则 $g(1)=g(0)=0$ $\quad\max g(x)\ge \max f(x)+8x^2-8x\ge 0$

若 $\max g(x)>0$，则设最大值点 $\eta\in(0,1)$ 使得 $g'(\eta)=0$

则 $\exists\xi_1\in(0,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,1)$ 使 $g'(\xi_1)=\dfrac{g(\eta)-g(0)}{\eta}>0$，$g'(\xi_2)=\dfrac{g(1)-g(\eta)}{1-\eta}<0$

所以 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $g''(\xi)=\dfrac{g'(\xi_2)-g'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0 \Rightarrow \min\limits_{0\le x\le 1}g''(x)\le 0$

若 $\max g(x)=0$，则 $g'(0)\le 0$，$g'(1)\ge 0$，$\exists\xi_i\in(0,1)$，$g''(\xi)=\dfrac{g'(\xi_2)-g'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$

$\Rightarrow \min\limits_{0\le x\le 1}g''(x)\le 0$

设函数$f(x)$在区间$(a,b)$内可导，证明：导函数$f'(x)$在$(a,b)$内严格单调增加的充分必要条件是：对$(a,b)$内任意的$x_1,x_2,x_3$，当$x_1<x_2<x_3$时，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

证：

"$\Rightarrow$" $\quad\forall x_1<x_2<x_3$，$\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$，$\xi_2\in(x_2,x_3)$

使 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，$f'(\xi_2)=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

则由$f'$的单增性知，$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，从而 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

"$\Leftarrow$" $\quad\forall x_1<x_2$ $\quad$设 $x_3=\dfrac{3x_1+x_2}{4}$，$x_4=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$x_5=\dfrac{x_1+3x_2}{4}$

则 $\forall u\in(x_1,x_3)$，$v\in(x_5,x_2)$ 有：

$$\frac{f(u)-x_1}{x_1-u}<\frac{f(u)-x_3}{x_3-u}<\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}<\frac{f(x_4)-f(x_5)}{(x_4-x_5)}<\frac{f(x_5)-f(v)}{x_5-v}<\frac{f(v)-f(x_2)}{v-x_2}$$

$$\therefore f'(x_1)=\lim_{u\to x_1^+}\frac{f(u)-x_1}{x_1-u}\le\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}<\frac{f(x_4)-f(x_5)}{(x_4-x_5)}\le\lim_{v\to x_2}\frac{f(v)-f(x_2)}{v-x_2}=f'(x_2)$$

求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(0)$ $(n\geq 3)$.

解 $f(x)=x^2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)$

$=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}-\frac{x^6}{4}+\cdots$

$=3!\frac{x^3}{3!}-2\cdot 4!\frac{x^4}{4!}+\frac{3\cdot 5!\,x^5}{5!}+\cdots$

$\therefore f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}\frac{n!}{n-2}$