例2 齐次解. $y_1-y_3=e^{3x}$, $y_2-y_3=e^{x}$ > 线性无关. > 通解 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-xe^{2x}$

非齐次解 $y_3=-xe^{2x}$

例3. 猜: $\lambda_{1,2}=1\pm i$.

$$y''+2y'+\underline{\underline{2y}}=0$$

对 $y''+p_1(x)y'+q_1(x)y=0$. 线性齐次. 有解 y_1,y_2. $\rightarrow$ ay_1+by_2 均为解.(线性).

$y''+p_2(x)y'+q_2(x)y=r(x)$. 线性非齐次. 有解 y_1,y_2. $\rightarrow$ $k(ay_1+by_2)+cy_1+dy_2$

$\begin{cases}a+b=0\\c+d=1\end{cases}$ 均为解.

可检验. $3y_2-2y_1$ 为解.

若有解. y_1,y_2,y_3. 类似可检验. $3y_1+3y_2-5y_3$ 为解.

例4. 积分方程 $\rightarrow$ 微分方程.

$$\varphi(x)=e^{x}+\int_0^x t\varphi(t)dt-x\int_0^x\varphi(t)dt.$$ 代入 $x=0$. $\varphi(0)=1$

求导. $\varphi'(x)=e^{x}+x\varphi(x)-\int_0^x\varphi(t)dt-x\varphi(x)$

$\varphi'(x)=e^{x}-\int_0^x\varphi(t)dt$ 代入 $x=0$, $\varphi'(0)=1$.

求导. $\left.\begin{aligned}&\varphi''(x)=e^{x}-\varphi(x),\\&\varphi(0)=1,\ \varphi'(0)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \varphi(x)=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}e^{x}$. 解出 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$.

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x+e^{x}).$$

例5. 法一: 由 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0\Rightarrow\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow f(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$

代入 $f''(x)+f(x)=2e^{x}$. 解得 $C_1=1$, $C_2=0$. $\Rightarrow \underline{f(x)=e^{x}}$.

法二: (降次). 联立二式消去 $f''(x)$ 得. $f'(x)-3f(x)=-2e^{x}$. $\Rightarrow f(x)=e^{x}+Ce^{3x}$.

代回②式中, $C=0\Rightarrow \underline{f(x)=e^{x}}$

例6：曲率. $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow |y''|=(1+y'^2)$. 上凸 $\Rightarrow y''<0$.

$y''+y'^2+1=0$. 令 $y'=p$, $\frac{dp}{dx}+p^2+1=0 \Rightarrow \int\frac{1}{p^2+1}dp=\int -dx$

$\arctan p=-x+C$, 由 $y'|_{x=0}=1 \Rightarrow C=\frac{\pi}{4}$.

$y'=\tan(\frac{\pi}{4}-x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\tan(x-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow y=\ln|\cos(x-\frac{\pi}{4})|+C$.

由 $y|_{x=0}=1$. $C=\frac{1}{2}\ln 2$.

例7. $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$. $y(1)=3$.

$e^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}=e^{\sqrt{x}}$.

$e^{\sqrt{x}}dy+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}y\,dx=(2+\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}dx$

$d(e^{\sqrt{x}}y)=(2+\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}dx$.

$\Rightarrow y=e^{-\sqrt{x}}(2xe^{\sqrt{x}}+C)$.

$y=2x+Ce^{-\sqrt{x}}$. 代入 $y(1)=3 \Rightarrow C=e$

$y=2x+e^{1-\sqrt{x}}$. $y\to+\infty\ (x\to+\infty) \Rightarrow$ 斜 $\frac{y}{x}\to 2$. $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{1-\sqrt{x}}}{x}=0\right)$ 斜渐近线 $y=2x$.

$\int 2e^{\sqrt{x}}dx \overset{\sqrt{x}=t}{=\!=}$

$+\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx \overset{\sqrt{x}=t}{=\!=} > \int(2+t)\cdot 2t\cdot e^t dt=\int e^t(2t^2+4t)dt$

导	$2t^2+4t$	$4t+4$	4	0
积	e^t	e^t	e^t	e^t

$I=e^t(2t^2+4t-4t-4+4)+C$

$=2t^2e^t+C$

$=2xe^{\sqrt{x}}+C$

例8.
$\begin{cases} \text{两不同实根 } \Delta>0, & C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x} \\ \text{两相同实根 } \Delta=0, & e^{\lambda x}(C_1x+C_2). \\ \text{两虚根 } \Delta<0, & e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x). \end{cases}$ $\underline{\alpha=0} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b>0 \end{cases}$ $\Delta=a^2-4b<0$

例9. (1) $\lambda^2+2\lambda+k=0$. $\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k}$, $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$. $\Rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ C_2=\frac{1-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{cases}$.

$\int_0^{+\infty}e^{\lambda x}dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \lambda<0$.

(2) $y(0)=C_1+C_2=1$
$y'(0)=C_1\lambda_1+C_2\lambda_2=1$. $\Rightarrow C_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & \lambda_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{vmatrix}}$, $C_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{vmatrix}}$

$\int_0^{+\infty}y(x)dx=C_1\cdot(-\frac{1}{\lambda_1})+C_2(-\frac{1}{\lambda_2})=\frac{1-(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}$

$=\frac{3}{k}$.

例10：(1) $y'+y=x$. $e^{\int 1dx}=e^x$. $\Rightarrow d(e^x y)=xe^x dx$.

$\Rightarrow y=e^{-x}(xe^x-e^x+C)=x-1+Ce^{-x}$.

(2). $d(e^t y)=f(t)e^t dt$. 从0到x积分.

$\int_0^x d(e^t y)=\int_0^x f(t)e^t dt \Rightarrow e^x y(x)-\overset{y(0)}{C}=\int_0^x f(t)e^t dt$.

$\Rightarrow y(x)=e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^t dt + C\right)$. ⟶ 有解了 → 周期性? → 唯一?

希望 $y(x)$ 为周期解. 首先. $y(T)=y(0)$. (必要条件)

$0=y(T)-y(0)=e^{-T}\left(\int_0^T f(t)e^t dt + C\right)-\overset{y(0)}{C} \Rightarrow C=-\frac{e^{-T}\int_0^T f(t)e^t dt}{e^{-T}-1}$.

验证: $y(x+T)-y(x)=e^{-(x+T)}\left(\int_0^{x+T}f(t)e^tdt+C\right)-e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^t dt + C\right)$.

$=e^{-x}\cdot \underline{\underline{C}}(e^{-T}-1)+e^{-x}\left(e^{-T}\int_0^{x+T} f(t)e^tdt-\int_0^x f(t)e^tdt\right)$

$=-e^{-x}\cdot e^{-T}\int_0^T f(t)e^tdt + e^{-x}\left(e^{-T}\int_0^T f(t)e^tdt + e^{-T}\int_T^{x+T} f(t)e^tdt - \int_0^x f(t)e^tdt\right)$.

$=e^{-x}\left(e^{-T}\int_0^T -f(t)e^tdt + e^{-T}\int_0^T f(t)e^tdt + e^{-T}\int_0^x f(t)e^{(t+T)}dt - \int_0^x f(t)e^tdt\right)$.

$=e^{-x}\left(e^{-T}\int_0^T -f(t)e^tdt + e^{-T}\int_0^T f(t)e^tdt + \int_0^x f(t)e^tdt - \int_0^x f(t)e^tdt\right)$.

$\cancel{e^{-x}\left(\int_{-T}^{T} f(t)e^tdt\right)}$

$=0$. (关键: $e^{-T}\int_0^{x+T} f(t)e^tdt = e^{-T}\int_0^T f(t)e^tdt + e^{-T}\int_T^{x+T} f(t)e^tdt$).

例11. (1). $f(0)=0$. $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0 \Rightarrow \exists\delta$, $0<x<\delta$, $-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<0$, 取 $f(\frac{\delta}{2})<0$.

$f(1)>0$, ⟹ 零点定理. $\exists\xi$, $f(\xi)=0$

(2). $yy''+y'^2=0$. 令 $y'=p$. $y''=\frac{dp}{dy}\cdot p \Rightarrow y\cdot p\frac{dp}{dy}+p^2=0$ → $p=0$ ×
→ $\frac{1}{p}dp=-\frac{1}{y}dy$.

$\Rightarrow \ln|p|=-\ln|y|+\ln|C| \Rightarrow yp=C$.

$g(0)=g(\xi)=0$. $g(\eta)=0$.

⟹ 辅助函数. $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

$f(0)=f(\xi)=0 \Rightarrow f'(\eta)=0$.