

数学外卖—微分方程

张誉翔

黄泽昕

邬宗圣

梁海纳

许子寒

2024 年 12 月 21 日

A

题目 1 求下列微分方程的通解或满足条件的特解:

1. $(e^{x+y} - e^x)dx + (e^{x+y} + e^y)dy = 0$

2. $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$

3. $(x \frac{dy}{dx} - y) \arctan \frac{y}{x} = x$

4. $y^2 dx - (4xy - 2x^2)dy = 0$

5. $(2x + y - 4)dx + (x + y - 1)dy = 0$

6. $(2x + y - 4)dx + (2x + y - 1)dy = 0$

7. $\cos x \frac{dy}{dx} + \sin x \cdot y = 1$

8. $y' = \frac{1}{xy + y^3}$

9. $y' = \frac{1}{xy + x^2 y^3}$

10. $yy'' + (y')^2 = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$

11. $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$

12. $y'' + y = x \cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = 0$

13. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x} + 3x$

14. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$

B

题目 2 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}, y_2 = e^x - xe^{2x}, y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 求该方程的通解.

题目 3 设 $y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 为某二阶常系数齐次线性微分方程的通解, 求该方程.

题目 4 设 $\varphi(x)$ 为连续函数, 且 $\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x \int_0^x \varphi(t)dt$, 求 $\varphi(x)$.

题目 5 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, 求 $f(x)$.

题目 6 设 $y = y(x)$ 是向上凸的光滑曲线, 其上任一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 且此曲线上点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$, 求该曲线的方程.

题目 7 设 $y = y(x)$ 满足 $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}, y(1) = 3$, 求 $y(x)$ 渐近线.

题目 8 若微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 则 ()

A. $a < 0, b > 0$;

C. $a = 0, b > 0$;

B. $a > 0, b < 0$;

D. $a = 0, b < 0$.

题目 9 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(1) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛;

(2) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$.

题目 10 已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的连续函数.

(1) 若 $f(x) = x$, 求方程的通解;

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期解.

题目 11 设函数在区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 证明:

(1) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根;

(2) 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个不同实根.

感谢参加我们的讲座! 麻烦填写一下反馈问卷, 帮助我们之后更好地开展活动, 谢谢!



外卖讲座反馈问卷

外卖官网: tongjimath.github.io

Bilibili: 一题 _ 撬动数学