同济大学
TONGJI UNIVERSITY
SHANGHAI
PEOPLE'S REPUBLIC OF CHINA

1. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos2x}}{\sin\sin x^2}$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+(\cos2x-1)}}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{\sin\sin x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(\cos2x-1)}{x^2}$ $\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}(2x)^2)}{x^2}=1.$ $\quad \cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x^2), & -\infty<x\le1\\ Ae^{\arctan x}, & 1<x<+\infty\end{cases}$ $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

则 $A=$ ____

解: $f(1)=f(1^-)=\ln2$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}Ae^{\arctan x}=Ae^{\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow A=e^{-\frac{\pi}{4}}\ln2.$

3. 曲线 $y=\frac{x}{x-1}+\ln(2+3e^x)$ 的斜渐近线方程为

解: $k_+=\lim\limits_{x\to+\infty}y/x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+3e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{2+3e^x}=1.$

$b_+=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-k_+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}+\ln(2+3e^x)-x$

$=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2+3e^x}{e^x}\right)=1+\ln3.$

$k_-=\lim\limits_{x\to-\infty}y/x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}+\frac{\ln(2+3e^x)}{x}=0$ $\times$

$y=x+(1+\ln3).$

4. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ ____

$y'=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

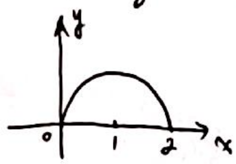
$y''=\left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]'=-\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot2x$

$=\frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

5. 函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 的单调增加区间为 ____

解: $y'=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}\geqslant0\Rightarrow x\in[0,1].$

变形. $y^2+(x-1)^2=1$, $y\geqslant0$.



6. 设 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=t-\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ ____

解: $\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2t}{t^2}=\frac{2}{t}.$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{2}{t^2}\Big/\frac{t^2}{1+t^2}=-\frac{2(1+t^2)}{t^4}$

7. 设 $x_n\le y_n\le z_n\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n-x_n)=0$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. 不一定存在 C.

夹逼准则, 条件变弱. $\quad x_n=y_n=z_n=n.$

$x_n=y_n=z_n=0.$

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x^2}{x^2}, & x>0\\ g(x)\sin x^2, & x\le0\end{cases}$ 其中$g(x)$为有界函数;

则 $f(x)$在$x=0$处. 导数为零 D.

$f(0)=0$. $f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}g(x)\sin x^2=\lim\limits_{x\to0^+}x^2g(x)=0$ (无穷小乘有界)

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-\cos x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^2}=0.$ 连续

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{g(x)\sin x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}xg(x)=0.$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-\cos x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^3}=0.$ 导数为0.

9. 设曲线C的方程为 $y=f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 不一定正确的个数.

①若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单增, 则 $f'(0)>0$. $y=x^3$

②若 $f'(0)>0$. 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单增. $y=\sin x$

③若 $(0,f(0))$ 是曲线C的拐点, 则 $f''(0)=0$ $y=x^{\frac{1}{2}}$

④若 $f''(0)=0$, 则 $(0,f(0))$ 是曲线C的拐点、 $y=x^4$

10. 设 $x\to 0$ 时, $f(x)$, $g(x)$ 分别是 x 的 n 阶和 m 阶的无穷小, 在下列命题中, 正确的个数是

① $f(x)g(x)$ 是 x 的 $m+n$ 阶无穷小. ✓

② 若 $n>m$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是 x 的 $n-m$ 阶无穷小. ✓

③ 若 $n\le m$, 则 $f(x)-g(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小. ✗

$f(x)=l_1x^n+o(x^n)$, $g(x)=l_2x^m+o(x^m)$.

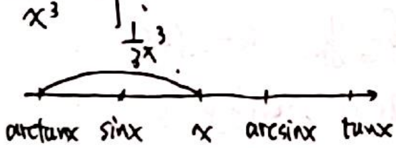
二.1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right)}$.

$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\arctan x}{x}-1\right)\right\}$

$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}\right\}$

$=e^{-\frac{1}{3}}$



2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right]\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\cdot\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)$

$=\frac{1}{12}$.

洛必达2次也可以算出.

3. 设 $f(x)=e^x\sin x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解: $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$.

$=e^x\cdot\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

$f''(x)=e^x\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sin(x+\frac{\pi}{4})+\cos(x+\frac{\pi}{4})\right)$

$=(\sqrt{2})^2e^x\left(\sin(x+\frac{\pi}{4}\cdot 2)\right)$

$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^ne^x\sin(x+\frac{\pi}{4}\cdot n)$.

归纳假设.

$f^{(n+1)}(x)=(\sqrt{2})^ne^x\left[\sin(x+\frac{n}{4}\pi)+\cos(x+\frac{n}{4}\pi)\right]$

$=(\sqrt{2})^{n+1}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4}(n+1))$

4. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+xy=x^2+\cos 2x$ 确定, 求 $y''(0)$.

解: 代入 $x=0$. $e^y=1 \Rightarrow y(0)=0$.

求导. $e^{x+y}(1+y')+y+xy'=2x-2\sin 2x$

代入 $x=0$, $e^0(1+y'(0))=0 \Rightarrow y'(0)=-1$.

求导. $e^{x+y}(1+y')^2+e^{x+y}\cdot y''+y'+y'+xy''=2-4\cos 2x$

代入 $x=0$. $e^0(1+(-1))^2+y''(0)+(-1)+(-1)=2-4$

$\Rightarrow y''(0)-2=-2$, $y''(0)=0$.

5. 求函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的单调区间及其图形的凹或凸的区间.

解: $y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$y''=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

$(0,e]$, $y'\ge 0$. ↑, $[e,+\infty)$, $y'\le 0$. ↓.

$(0,e^{\frac{3}{2}}]$. $y''\le 0$. 凸, $[e^{\frac{3}{2}},+\infty)$, $y''\ge 0$. 凹

6. 证明：当 $x>0$ 时，有 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\ln(x+\sqrt{1+x^2})<x$.

证：令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，在 $(0,x)$ 上用Lagrange

$\exists\,\xi\in(0,x)$ s.t. $\frac{(x-0)}{\sqrt{1+\xi^2}}=f(x)-f(0)$

即 $\frac{x}{\sqrt{1+\xi^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

由 $\xi\in(0,x)$，$\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}<1$，$\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}>\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

故 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\ln(x+\sqrt{1+x^2})<x$.

三、讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(x^{2n}+2^n)}{n}$，$(x>0)$ 的连续性.

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left([x^{2n}+2^n]^{\frac{1}{n}}\right)=\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}(x^{2n}+2^n)^{\frac{1}{n}}\right)$

$=\ln(\max\{x^2,2\})$.

即 $f(x)=\begin{cases}\ln x^2, & x\geq\sqrt{2}\\ \ln 2, & 0<x<\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\sqrt{2}}f(x)=\ln 2$

f 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

$\left(\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a,b,c\}\quad a,b,c>0\right)$

四. 当 $n\to\infty$ 时，若 $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sim an^{-b}\ (b>0)$.
求 a,b 的值.

解：由Taylor.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}=e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)}=e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}$

$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e-e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}=e\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}\right)\sim\frac{e}{2n}$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e-(1+\frac{1}{n})^n}{an^{-b}}=1$ 得 $a=\frac{e}{2}$，$b=1$.

五. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$，其中 m,n 是任意给定的正整数，$m\neq n$.

解：$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$.

$=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m-mx^n-n+nx^m}{(1-x^m)(1-x^n)}\right)$. 洛必达前先用等价无穷小

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{m-n+nx^m-mx^n}{[-m(x-1)]\cdot[-n(x-1)]}$.

洛 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{mnx^{m-1}-mnx^{n-1}}{2mn(x-1)}$.

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{2(x-1)}$ 讨论 m,n

$m=1,n>1$. 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^{n-1}}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-(n-1)x^{n-2}}{2}=\frac{1-n}{2}$

$n=1,m>1$. 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{m-1}-1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(m-1)x^{m-2}}{2}=\frac{m-1}{2}$

$m>1,n>1$. 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{(m-1)x^{m-2}-(n-1)x^{n-2}}{2}=\frac{(m-1)-(n-1)}{2}=\frac{m-n}{2}$

综上得 原式 $=\frac{m-n}{2}$

六. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=1$，$f(1)=\frac{1}{2}$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个零点，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f^2(\xi)=0$.

思考：
$$\begin{tikzcd} f \arrow[r] & F \arrow[d, "中值定理"] \\ f(\xi) & F(\xi) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

构造F. $f'(x)+f^2(x)=0$. $\quad\frac{f'}{f}=[\ln f]'$

$\frac{f'(x)}{f^2(x)}+1=0$. $\quad\frac{f'}{f^2}=\left[-\frac{1}{f}\right]'$

由 $\frac{f'}{f^2}+1=0$.

$\downarrow$

$[-\frac{1}{f}]'+[x]'=C$

考虑. $F(x)=x-\frac{1}{f(x)}$.

Case I. $f(x)$无零点.

令$F(x)=x-\frac{1}{f(x)}$.

$F(0)=-1$, $F(1)=1-2=-1$

$F(0)=F(1)$. 由Rolle中值定理.

$\exists\xi\in(0,1)$. $F'(\xi)=0$.

$F'(x)=1+\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{f^2(x)}[f'(x)+f^2(x)]$.

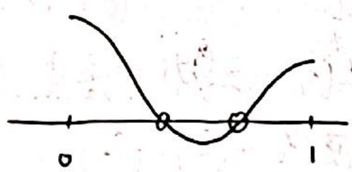
$\Rightarrow$. $f^2(\xi)+f'(\xi)=0$.

Case II. $f(x)$只有一个零点. $f(x_0)=0$.

思考: 有 x_0点信息 $f(x_0)=0$. 能否说明 $f'(x_0)=0$?

$\rightsquigarrow$ 费马引理. x_0若是极值点, 则有 $f'(x_0)=0$.

$\boxed{\text{极小值}}$. 若有η. $f(\eta)<0$



则 $(0,\eta)$上, $f(0)\cdot f(\eta)<0$.

$(\eta,1)$上, $f(\eta)\cdot f(1)<0$ 在$(0,\eta)$, $(\eta,1)$上分别存在至少一个零点.

与题意矛盾. 因此有 $f(x)\geq 0$.

又 仅有一个零点 $f(x_0)=0$. 故x_0为最小值点.

由费马引理, $f'(x_0)=0$. 即 $f'(x_0)+f^2(x_0)=0$.