同济大学
TONGJI UNIVERSITY
地址：中国上海市四平路1239号 邮编：200092
1239 SIPING ROAD SHANGHAI CHINA 200092
电话（TEL）：+86 21- 传真（FAX）：+86 21-
网址（WEB）：www.tongji.edu.cn

12. $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=-1$，$\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}=2$ 且 $t=0$ 时，$y=-1$

对 $y^3+3ty+1=0$ 求微分

$3y^2\frac{dy}{dt}+3y+3t\frac{dy}{dt}=0$，$6y\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+3y^2\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+3t\frac{d^2y}{dt^2}=0$

$\therefore \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=1$，$\frac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=0}=0$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=\left.\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}\right|_{t=0}=2$

13. $y=(x^3-1)^ne^{2x}=(x-1)^n(x^2+x+1)^ne^{2x}$

令 $u=(x-1)^n$，$v=(x^2+x+1)^ne^{2x}$，由Leibniz公式，得

$y^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k u^{(n+1-k)}v^{(k)}$ $\therefore y^{(n+1)}(1)=C_{n+1}^1u^{(n)}v^{(1)}=(n+1)\cdot n!\left[n(x^2+x+1)^{n-1}(2x+1)e^{2x}+(x^2+x+1)^n\cdot 2e^{2x}\right]\Big|_{x=1}$

$\therefore y^{(n+1)}(1)=(n+2)!\,3^n\cdot e^2$

14. $f'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow (1-x^2)[f'(x)]^2=4f(x)$ 再求一次导

$\Longrightarrow -xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2$，应用Leibniz公式，两端同时求n阶导

$\therefore -xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)+(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)=0$

即 $-n^2f^{(n)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)+(1-x^2)f^{(n+2)}(x)=0$

$x=0$ 代入上式 $\therefore f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$ 而 $f'(0)=0$，$f''(0)=2$

$\therefore f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots\\ 2^{2k-1}\cdot[(k-1)!]^2, & k=1,2,\cdots\end{cases}$

15. $\frac{\arctan a}{a}=\frac{1}{1+\xi_a^2}$ $\therefore \lim_{a\to0^+}\left(\frac{\xi_a}{a}\right)^2=\lim_{a\to0^+}\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}=\lim_{a\to0^+}\frac{\frac{1}{3}a^3+o(a^3)}{a^3+o(a^3)}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ 原极限为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. (1) 令 $F(x)=f(x)-x$ $\therefore F(0.5)=0.5>0$ $F(1)=-1<0$

$\therefore$ 由零点定理，$\exists\,\xi\in(0.5,1)$，s.t. $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=\xi$

同濟大學
TONGJI UNIVERSITY
地址：中国上海市四平路1239号　邮编：200092
1239 SIPING ROAD SHANGHAI CHINA 200092
电话（TEL）：+86 21-　传真（FAX）：+86 21-
网址（WEB）：www.tongji.edu.cn

(2) 令 $G(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x)$ ∵ $G(0)=0$, $G(\xi)=0$

∴由Rolle中值定理，得 $\exists\eta\in(0,\xi)$, s.t. $G'(\eta)=0$

即 $e^{-\lambda\eta}[f'(\eta)-1-\lambda(f(\eta)-\eta)]=0$ 又 $e^{-\lambda\eta}\neq0$

∴ $f'(\eta)-\lambda(f(\eta)-\eta)=1$

17. 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$, $x\in[0,1-\frac{1}{n}]$

∴ $F(0)+F(\frac{1}{n})+\cdots+F(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(0)=0$

① ~~上述每一项都不为0，则~~ 均为0, $F(0)=F(\frac{1}{n})\cdots=F(\frac{n-1}{n})=0$ 结论显然成立

② 各项不全为0，则其中必有 $\xi_1,\xi_2\in\{0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}\}$, s.t. $F(\xi_1)F(\xi_2)<0$

∴由零点定理，$\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$

18. ① $\begin{cases} f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\cdot\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\cdot\frac{(a-b)^2}{4}, & \xi_1\in(a,\frac{a+b}{2}) \\ f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\cdot\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}, & \xi_2\in(\frac{a+b}{2},b) \end{cases}$

两式相加，即 $f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})=\frac{(b-a)^2}{8}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))$

∴由导函数介值定理（Darboux定理），即 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,

s.t. $f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$

② 令 $F(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(x)$ ∴ $f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=F(\frac{a+b}{2})-F(a)$

∴由Lagrange中值定理，$\exists\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$, s.t. $F(\frac{a+b}{2})-F(a)=F'(\xi_1)\cdot\frac{b-a}{2}$

$F'(\xi_1)=f'(\xi_1+\frac{b-a}{2})-f'(\xi_1)$ 又 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导

∴由Lagrange中值定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_1+\frac{b-a}{2})\subset(a,b)$, s.t

$F'(\xi_1)=f'(\xi_1+\frac{b-a}{2})-f'(\xi_1)=f''(\xi)\cdot\frac{b-a}{2}$

∴ $F(\frac{a+b}{2})-F(a)=f''(\xi)\cdot\frac{(b-a)^2}{4}$ 即 $f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$