2024.10.27 期中讲座

解淑涵

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\tan^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2x}$

$=-\dfrac{1}{2}$

$\ln(\cos x)=\ln(1+\cos x-1)\sim\cos x-1$

$\tan x\sim x$

$\sin x\sim x$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

记 $a_n=\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$，则

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2\cdot n^n}{(n+1)^n}=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n\to\dfrac{2}{e}$，$n\to\infty$.

由于 $\dfrac{2}{e}<1$，$a_n\to 0$，这是因为

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当 $n>N$ 时，$\dfrac{2}{e}-\varepsilon<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\dfrac{2}{e}+\varepsilon$，

进而 $\left(\dfrac{2}{e}-\varepsilon\right)^{n-N}<\underbrace{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\cdots\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}}}_{=\frac{a_{n+1}}{a_{N+1}}}<\left(\dfrac{2}{e}+\varepsilon\right)^{n-N}$

由夹逼准则及 ε 的任意性，令 $n\to\infty$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

定义法：$\forall\varepsilon>0$，不妨假设 $0<\varepsilon<1$，

因为 $\left(\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n\cdot\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{2\cdot(n!)^{\frac{1}{n}}}{n\cdot\varepsilon^{\frac{1}{n}}}\to\dfrac{2}{e}<1$，

所以 n 充分大时，$\left(\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n\cdot\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}}<1\Rightarrow\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}<\varepsilon$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}=0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+n}-\sqrt{n^2+n}\right)$

令 $t=\dfrac{1}{n}$，则 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+t+t^2}-\sqrt{1+t}}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}(1+t+t^2)^{-\frac{2}{3}}(1+2t)-\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{1}$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}$

$=-\dfrac{1}{6}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))-x(1+x)}{x^3}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[(1+\frac{1}{x})^x - e + \frac{e}{2x}\right]$.

x在0附近

$\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$(1+\frac{1}{x})^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \exp\left\{x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right)\right\}$

$=\exp\left\{1-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right\}$

$= e\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})}$

$= e\cdot\left[1+\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)^2\right]$

$\triangleq E(x)$.

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[E(x)-e+\frac{e}{2x}\right]$

$= e\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right) = \frac{11}{24}e$.

6. 判断无穷小的阶数 $(x\to 0)$.

A. $\sqrt{1+\arcsin x}-\sqrt{1+x}$

$=\dfrac{\arcsin x - x}{\sqrt{1+\arcsin x}+\sqrt{1+x}} \sim \arcsin x - x \triangleq f(x)$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1$, $f''(x)=(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)\sim x$.

故 $f(x)$ 为 3 阶无穷小.

B. $\sqrt{1+2x}-x-1 \triangleq f(x)$.

$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{1+2x}}-1$, $f''(x)=(-\frac{1}{2})(1+2x)^{-\frac{3}{2}}\times 2 \to -1$, $x\to 0$.

故 $f(x)$ 为 2 阶无穷小.

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

C、$x(\tan x - x) \triangleq x f(x)$

$f'(x) = \sec^2 x - 1$, $f''(x) = 2\sec^2 x \tan x \sim x$.

故 $f(x)$ 为3阶无穷小，$x(\tan x - x)$ 为4阶无穷小。

D、$e^{5x^4-2x} - 1 \sim 5x^4 - 2x \sim x$. 故为1阶无穷小。

7、

$$\begin{array}{ccccccccc} f & \Leftarrow & a & \Leftarrow & b & \Leftrightarrow & c & \Leftarrow & d \\ & & \Updownarrow & & & & & & \\ & & e & & & & & & \\ & & \Uparrow & & & & & & \\ & & g & & & & & & \end{array}$$

8、A、只有在 $\varphi(x)$ 的值域真包含 $[x_1, x_3]$ 时，$f[\varphi(x)]$ 有3个间断点

9、2、$f(x) = (x-2)(x+1)|x|\cdot|x+1|\cdot|x-1|$

只有 $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-2)(x+1)|x|\cdot|x+1|\cdot|x-1|}{x-1}$

和 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(x-2)(x+1)|x|\cdot|x+1|\,|x-1|}{x}$

不存在，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处不可导。

10、(1) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$.

$0<x<1$, $f'(x)<0$, $x>1$, $f'(x)>0$.

$f(x)_{min} = f(1) = 1$.

(2) 由(1)，$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$. $\forall x>0$.

因为 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$，而 $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$,

所以 $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_{n+1}}$, $x_n < x_{n+1}$.

又 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, $x_n < e$.

由单调收敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设为 A.

则 $\ln A+\frac{1}{A}\le 1$，结合(1)，$A=1$。

11、证 $x<\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，$0<x<1$。

法一：设 $f(x)=\arcsin x-x$，$g(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x$。

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1>0$，$g'(x)=\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}>0$。

$f(x)>f(0)=0$，$g(x)>g(0)=0$，

从而 $x<\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，$0<x<1$。

法二：要证 $x<\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，

只需证 $1<\frac{\arcsin x}{x}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

设 $\varphi(x)=\arcsin x$，则 $\varphi'(0)=1$，$\varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

由Lagrange's 中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$，$\varphi'(\xi)=\frac{\arcsin x}{x}$。

即需证 $\varphi'(0)<\varphi'(\xi)<\varphi'(x)$，$0<\xi<x$。

由 $\varphi'(x)$ 增，上式显然，因此得证。