“数学外卖”高等数学组期中讲座讲义

刘欣晨　解淑涵　黄泽昕　王一诺　杨瑞灵　赵思铭

October 27th

1. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\tan^2 x}$

2. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$

3. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+n}-\sqrt{n^2+n}\right)$

4. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

5. 求极限：

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e+\frac{e}{2x}\right]$$

6. 当 $x\to0$ 时，判断下列函数的无穷小的阶数

A.$\sqrt{1+\arcsin x}-\sqrt{1+x}$　　B.$\sqrt{1+2x}-x-1$

C.$x(\tan x-x)$　　D.$e^{5x^4-2x}-1$

7. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，试用 $\Leftrightarrow$ 或 $\Leftarrow$ 连接下列命题，以表达命题的强弱关系。

a. $f(x)$ 连续　b. $f(x)$ 可微　c. $f(x)$ 可导　d. $f(x)$ 连续可微

e. $f(x)$ 一致连续　f. $f(x)$ 有界　g. $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, $|f(x_1)-f(x_2)|\le\frac{3}{2}|x_1-x_2|$。

8. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰好有三个间断点 $x_1<x_2<x_3$，$\varphi(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减的连续函数，则复合函数 $f(\varphi(x))$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上（　）。

A. 至多有三个间断点

B. 恰好有 3 个间断点

C. 有多于 3 个间断点但不会有无穷多个间断点

D. 可能有无穷多个间断点

9. 设 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$，不可导点的个数是 ______

10. 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$。求：

(1) 求 $f(x)$ 的最小值

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$。证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限

11. 证明：$x<\arcsin x<\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$， 其中 $0<x<1$

12. 设 $y=f(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=t^2-t \\ y^3+3ty+1=0 \end{cases}$ 确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$.

13. 设 $y=(x^3-1)^n e^{2x}$，求 $y^{(n+1)}(1)$。

14. 设 $f(x)=(\arcsin x)^2$，求 $f^{(n)}(0)$。

15. 设 ξ_a 为函数 $f(x)=\arctan x$ 在区间 $[0,a]$ 上使用 Lagrange 中值定理时的中值，求 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{\xi_a}{a}$。

16. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(0.5)=1$ 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0.5,1)$，使 $f(\xi)=\xi$

(2) 对于任意实数 λ，一定存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得 $f'(\eta)-\lambda(f(\eta)-\eta)=1$.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$。证明：$\forall n\geqslant 2, n\in\mathbb{N}, \exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导 $(b>a>0)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$.