数学外卖-导数与微分解答

李长浩　何山

2024 年 10 月 19 日

第一部分　导数的概念

例题 1 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

试讨论 $f(x)$ 的连续性、可导性及导函数的连续性.

解 当 $x>0$ 时，$f(x)$ 是初等函数的复合，是连续、可导及导函数连续的. 因此，我们仅需考虑在 $x=0$ 处函数的性质.

当 $\alpha>0$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

当 $\alpha\leqslant0$ 时，取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to0^+$，而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^{\alpha}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\quad 不存在,$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不是右连续的. （更不会有可导性及导函数了）

故 $\alpha>0$ 时，$f(x)$ 连续. 下面我们只需考虑 $\alpha>0$ 的情形来进一步讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性及导函数的连续性.

当 $\alpha>0$ 时，

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0}\frac{x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x},$$

当 $\alpha>1$ 时，$f'(0)=0$，当 $0<\alpha\leqslant1$ 时，$f'(0)$ 不存在.

故 $\alpha>1$ 时，$f(x)$ 可导.

$$f'(x)=\begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}\tag{1}$$

当 $\alpha>2$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$，当 $1<\alpha\leqslant2$ 时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处振荡间断，故 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 不存在.

故 $\alpha>2$ 时，导函数连续. □

注 $\{x_n\}$ 的取法：保证 n 趋于无穷大时 x_n 是趋于 0^+ 的无穷小量，而且要便于 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的运算.

例题 2 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分必要条件是（　　）.

(A) $f(a)=0, f'(a)=0$　　(B) $f(a)=0, f'(a)\neq 0$

(C) $f(a)\neq 0, f'(a)=0$　　(D) $f(a)\neq 0, f'(a)\neq 0$

解 当 $f(a)\neq 0$ 时，

$$(|f(x)|)'=\left(\sqrt{f^2(x)}\right)'=\frac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}.$$

故 $(|f(a)|)'=\dfrac{f(a)\cdot f'(a)}{\sqrt{f^2(a)}}$，即 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导.

当 $f(a)=0$ 时，

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)|}{x-a}.$$

故 $f'_+(a)=|f'(a)|$，$f'_-(a)=-|f'(a)|$，当且仅当 $f'_+(a)=f'_-(a)$ 即 $f'(a)=0$ 时 $|f(x)|$ 才可导.

由题意，当且仅当 $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$ 时 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导. 故选 *B*. □

注 几何意义：绝对值将 x 轴下方的图像以 x 轴为镜像轴翻转到 x 轴上方，$f(x)$ 与 x 轴切线斜率不为 0 的交点经过翻转就成了不可导点.

例题 3 求函数 $f(x)=(x^2-5x+6)|x^3-3x^2+2x|$ 的不可导点.

解 设 $f(x)=g(x)|x-a|$. 其中 $g(x)$ 连续，则当 $g(a)=0$ 时 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导. 事实上，

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)|x-a|}{x-a}.$$

当 $x\to a^+$ 时，$f'(a)=g(a)$，当 $x\to a^-$ 时，$f'(a)=-g(a)$. 因此，当且仅当 $g(a)=0$ 时 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导.

由此，我们先对题目中的 $f(x)$ 进行因式分解：

$$f(x)=(x-2)(x-3)|x(x-1)(x-2)|.$$

由例题 *2* 的结论，我们知道不可导点的所有可能取值为绝对值内函数的零点，即 $x=0$，$x=1$ 和 $x=2$，又由以上事实，$x=2$ 时，$g(x)=(x-2)(x-3)=0$，因此 $f(x)$ 在 $x=2$ 时可导. 因此，其不可导点是 $x=0$ 和 $x=1$. □

例题 4 解答下列问题.

(1) 设 $a<b$，并且设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是可微函数. 如果对所有的 $x\in[a,b]$ 均有 $f'(x)>0$，证明 f 是严格单调递增的.

(2) 再问，对于 $f:X\to\mathbb{R}, X\subseteq\mathbb{R}$，$f$ 在 X 上可微，且对所有的 $x\in X$ 均有 $f'(x)>0$，问 f 是否是严格单调递增的？如果是，请给出证明；如果不是，请举出反例.

解 *(1)* 对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，不妨设 $x_1<x_2$，则由 *Lagrange* 中值定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0,$$

即
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0,$$
因此 f 是严格单调递增的. □

(2) f 不是严格递增的. 例如 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$，它分别在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，但在整个定义域内并不是单调递增的. □

例题 5 设 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-2}{x-a}=3$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}=$________.

解 由题意，
$$\lim_{x\to a}[f(x)-2]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-2}{x-a}(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-2}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)=0,$$
因此 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=2$.

又 $f(x)$ 连续，故
$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)=2,$$
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-2}{x-a}=3.$$
而
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}\\=&\lim_{h\to 0}[f(a+2h)+f(a-h)]\cdot\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}\\=&2f(a)\cdot 3f'(a)\\=&36.\end{aligned}$$
□

注 这道题用 *L'Hospital* 法则也能得到正确答案，但是这是不严谨的，并不一定适用于任何情形，例如下题.

例题 6 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$，则下列正确的是（　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=3$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=6$　　(C) $f''(0)=0$　　(D) $f'''(0)=6$

解 由 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，有
$$\begin{aligned}f(0)&=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\cdot x^3=0,\\f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\cdot x^2=0,\\f''(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}\text{ 存在},\end{aligned}$$
由 *L'Hospital* 法则，
$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\cdot x=0.$$
因此 $f''(0)=0$，故选 *C*. □

注 *L'Hospital* 法则使用条件：由洛之后的极限存在可以推洛之前的极限存在.

例题 7 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $\Delta f(1)$ 是 $f(x)$ 在增量为 Δx 时的函数值增量,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(1)-\mathrm{d}f(1)}{\Delta x}=$ (　　).

(A) $f'(1)$　　(B) 1　　(C) ∞　　(D) 0

解 由于 $\Delta f(1)=f(1+\Delta x)-f(1)$，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(1)}{\Delta x}=f'(1)$，又

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{d}f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(1)\,\mathrm{d}x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(1)\Delta x}{\Delta x}=f'(1),$$

于是原式 $=f'(1)-f'(1)=0$. □

注 在微分概念中，由 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，得 $\mathrm{d}y=A\Delta x$，故由 $\Delta x=1\cdot\Delta x+o(\Delta x)$，得 $\mathrm{d}x=1\cdot\Delta x$，也就有 $\mathrm{d}y=A\Delta x=A\,\mathrm{d}x$.

第二部分　导数的计算

例题 8 设 $y=\ln^3(\sin^2 x+1)$，求 y'.

解

$$\begin{aligned}y'&=3\ln^2(\sin^2 x+1)\cdot\frac{1}{\sin^2 x+1}\cdot 2\sin x\cdot\cos x\\&=\frac{3\sin 2x}{\sin^2 x+1}\ln^2(\sin^2 x+1).\end{aligned}$$

例题 9 证明：$(x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}$，$n=0,1,\cdots$.

解 利用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，有 $(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})'=-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，满足命题.

假设 $n=m$ 时，有 $(x^{m-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^{(m)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\dfrac{(-1)^m}{x^{m+1}}$ 成立，

则 $n=m+1$ 时，有 $(x^m\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^{(m+1)}=(x\cdot x^{m-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^{(m+1)}$

令 $u=x$，$v=x^{m-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，则

$$\begin{aligned}\left(x^m\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(m+1)}&=\sum_{k=0}^{m+1}\mathrm{C}_{m+1}^k u^{(k)}v^{(m+1-k)}\\&=uv^{(m+1)}+\mathrm{C}_{m+1}^1u'v^{(m)}\\&=x(x^{m-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^{(m+1)}+(m+1)(x^{m-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^{(m)}\\&=x\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{(-1)^m}{x^{m+1}}\right]'+(m+1)\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\frac{(-1)^m}{x^{m+1}}\\&=x\left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\frac{(-1)^m}{x^{m+3}}+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\frac{(-1)^{m+1}(m+1)}{x^{m+2}}\right]+(m+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\frac{(-1)^m}{x^{m+1}}\\&=\frac{(-1)^{m+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^{m+2}}.\end{aligned}$$

故对任意正整数 n，命题均成立. □

例题 10 由方程 $x^y = y^x$ 确定了 y 关于 x 的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 对等号两边取对数，得

$$y\ln x = x\ln y,$$

对 x 求导数，得

$$y'\ln x + y\cdot\frac{1}{x} = \ln y + x\cdot\frac{1}{y}\cdot y',$$

即

$$y'(\ln x - \frac{x}{y}) = \ln y - \frac{y}{x},$$

因此有

$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}} = \frac{xy\ln y - y^2}{xy\ln x - x^2}.$$

□

例题 11 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = \arctan(t-1) \end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0} =$__________.

解 记

$$\begin{cases} x = t + \sin t = \psi(t), \\ y = \arctan(t-1) = \varphi(t) \end{cases}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\psi'(t)} = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{\psi'^3(t)},$$

由

$$\begin{cases} \psi'(t) = 1 + \cos t \\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2 - 2t + 2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi''(t) = -\sin t \\ \varphi''(t) = -\dfrac{2t-2}{(t^2-2t+2)^2} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \psi'(0) = 2 \\ \psi''(0) = 0 \\ \varphi'(0) = \dfrac{1}{2} \\ \varphi''(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

代入，得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{8}$. □

注 很多时候，直接代入求解是复杂的，我们可以先把要求解的式子化到最简形式再代入.

例题 12 求 $y=\dfrac{5}{2+3x-2x^2}$ 的 n 阶导数，n 为正整数.

解 考虑裂项后的式子求导更为方便. 因此我们考虑先用待定系数法裂项.

$$y=\frac{5}{2+3x-2x^2}=\frac{5}{(-2x-1)(x-2)}.$$

令 $y=\dfrac{A}{-2x-1}+\dfrac{B}{x-2}$，则

$$y=\frac{A}{-2x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{(x-2)A+(-2x-1)B}{(-2x-1)(x-2)}.$$

即

$$(x-2)A+(-2x-1)B=5.$$

令 $x=2$，得 $B=-1$；令 $x=-\dfrac{1}{2}$，得 $A=-2$. 因此

$$y=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{x-2}.$$

可得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+\frac{1}{2})^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

注 这里用待定系数法将高次的分母转化为一次的分母，在求高阶导数时更简便. 此外，我们以后在学习有理函数不定积分时也会用到待定系数法. 这都是化繁为简的数学思想.

例题 13 设 $y=(x^3-1)^9\mathrm{e}^{2x}$，求 $y^{(10)}(1)$.

解 首先我们给出以下事实：设 $y=(x-a)^n$，$a\in\mathbb{R},n\in Z^+$，则对任意正整数 m，有

$$y^{(m)}(a)=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ n!, & m=n\end{cases}$$

由题意，$y=(x^3-1)^9\mathrm{e}^{2x}=(x-1)^9(x^2+x+1)^9\mathrm{e}^{2x}$. 设 $u=(x-1)^9$，$v=(x^2+x+1)^9\mathrm{e}^{2x}$，则由 *Leibnitz* 公式，有

$$(uv)^{(10)}=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^{k}u^{(10-k)}v^{(k)}.$$

由上述事实，当 $k\neq 1$ 时，$u^{(k)}\equiv 0$，因此我们只需考虑 $k=1$ 时的情形，即

$$y^{(10)}=\mathrm{C}_{10}^{1}\cdot 9!\cdot\left[9(x^2+x+1)^8(2x+1)\mathrm{e}^{2x}+(x^2+x+1)^9\cdot 2\mathrm{e}^{2x}\right],$$

代入 $x=1$，得

$$y^{(10)}(1)=110\times 9!\times 3^9\times \mathrm{e}^2.$$

□

例题 14 解答下列问题.

1. 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$；

2. 设 $g(x)=\arcsin x$，求 $g^{(n)}(0)$.

解 *1.* 由于 $f(x)=\arctan x$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，于是

$$(1+x^2)f'(x)=1.$$

对上式两边同时关于 x 求 $n+1$ 阶导数，有

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+\mathrm{C}_{n+1}^1\cdot 2x\cdot f^{(n+1)}(x)+\mathrm{C}_{n+1}^2\cdot 2\cdot f^{(n)}(x)=0.$$

从而当 $x=0$ 时，有 $f^{(n+2)}(0)+n(n+1)f^{(n)}(0)=0$，即 $f^{(n+2)}(0)=-n(n+1)f^{(n)}(0)$，结合 $f(0)=0$，$f'(0)=1$ 可得

$$f^{(2m)}(0)=0,\quad f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!.$$

2. 由于 $g(x)=\arcsin x$，所以 $g'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，进而 $g''(x)=\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=\dfrac{xg'(x)}{(1-x^2)}$，即

$$(1-x^2)g''(x)-xg'(x)=0.$$

上式两端关于 x 求 n 阶导数，有

$$(1-x^2)g^{(n+2)}(x)+\mathrm{C}_n^1(-2x)g^{(n+1)}(x)-2\mathrm{C}_n^2g^{(n)}(x)-xg^{(n+1)}(x)-\mathrm{C}_n^1g^{(n)}(x)=0.$$

从而当 $x=0$ 时，有 $g^{(n+2)}(0)-n(n-1)g^{(n)}(0)-ng^{(n)}(0)=0$，即 $g^{(n+2)}(0)=n^2g^{(n)}(0)$，结合 $g(0)=0$，$g'(0)=1$ 可得

$$g^{(2m)}(0)=0,\quad g^{(2m+1)}(0)=\left[(2m+1)!!\right]^2.$$

□

注 这里 $(2m+1)!!=(2m+1)(2m-1)\cdots 3\cdot 1$.

感谢参加我们的讲座！麻烦填写一下反馈问卷，帮助我们之后更好地开展活动，谢谢！

外卖讲座反馈问卷

外卖官网：tongjimath.github.io
Bilibili：一题 _ 撬动数学