1、导数.

$f(x)$　$x\in I$　x_0处自变量增量 Δx　$x_0\in I$.　$x_0+\Delta x\in I$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ 0^+\ 0^-}}\frac{\overbrace{f(x+\Delta x)-f(x_0)}^{\Delta y}}{\Delta x}=f'(x_0)$$

说明：① Δx可广义化　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x-\tan\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x-\tan\Delta x}$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x^2)-f(x_0)}{(\Delta x)^2}$ ×.

进一步：$\Delta x=x-x_0$时　$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

② 提法等价：$\begin{cases} f(x)\text{在}x_0\text{处可导/导数存在}\\ f'(x_0)=A\ (A\text{为有限数})\end{cases}$

③ $f'(x_0)$存在的充要条件

(左右极限存在且相等)

$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ ⟶ 极限存在的充要条件

本质：极限的运算

④ 一点可导必要条件：连续

2. 几何意义

$f'(x_0)=k$　　$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

例：求 $x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处的切线

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}=\infty$　$f'(0)$不存在　但具有一条垂直x轴的切线 $x=0$

f'存在 $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ 切线存在

3. 高阶导数

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

$f''(x_0)$存在 $\Rightarrow$ $f(x)$在$U(x_0,\delta)$内一阶导存在且连续(x_0处)

4、微分

对于一个函数增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

∃常数 A(与 Δx 无关) $\Delta y = \underbrace{A\Delta x}_{\substack{\text{线性主部} \\ x_0\text{处的微分 } dy}} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\text{误差}}$

$f(x)$ 在 x_0 处可微

$dy|_{x=x_0} = A\Delta x$ 或 $dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$

说明： ① dy 与 Δy 的区别

② $dx = \Delta x$

③ 判别可微

Ⅰ. 写增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

Ⅱ. 求主部 $dy = f'(x_0)\Delta x$

Ⅲ. 作差 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x} = 0$

④ 一元函数，可微与可导等价

用简单的量代替复杂的量

产生的误差又可以忽略

"估计"

几何上：

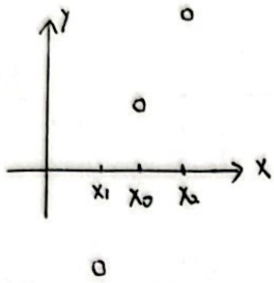
可用切线近似代替曲线

扩展：导函数具有怎样的性质？

① $f(x)$ 存在

x_1： x_0^-

x_2： x_0^+

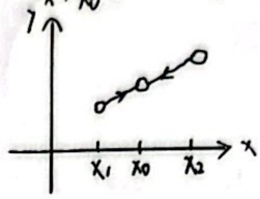


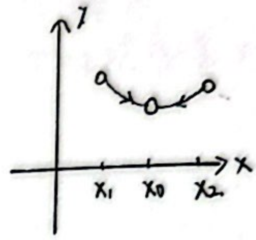
"无牵无挂"

② $f(x)$ 在 x_0 处连续

当 x 靠近 x_0 时，$f(x)$ 也足够靠近 $f(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$



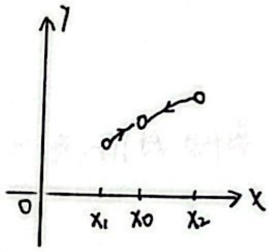


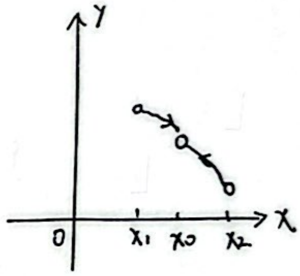
"相依相偎"

③ $f(x)$ 在 x_0 处可导

$f(x)$ 靠近 $f(x_0)$ 速度不能慢于 $x\to x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} A & A\neq 0 \quad \text{同阶} \\ 0 & \quad \text{高阶} \end{cases}$$



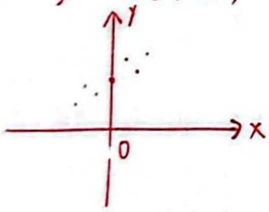


"相依更近"

假设 $A>0$ 右邻域：$f(x)>f(x_0)$

左邻域：$f(x)<f(x_0)$

Q1： $f'(0)>0 \Rightarrow \exists\delta>0$，$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单增 反例：$x^2\sin\frac{1}{x}+x$



不一定是"排着队"上去的

补充条件：$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续 保号性

Q2： $f'(x)$ 连续，$f'(0)=0 \Rightarrow \exists\delta>0$，$f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内恒为常数 分数阶导数

先砍掉 反例：x^3 在 $x=0$ 处 只是从导数变化率的工具角度来说，它没有能力测到这种变化

谈反例：是一个行之有效的方法，帮助我们快速否定一个假命题

思考两个问题：为什么举这样的反例？

在考场上我能举出这样的反例吗？

希望大家在记一些经典例子的同时也能深刻把握背后的客观规律，不至于在考场上的时候碰运气想反例

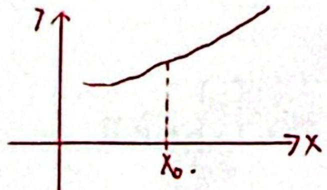
而是可以从概念本身出发去解决问题

这样就是"有抓手"、"有底气"的

性质： ① $f'(x_0)$ 存在，$\lim_{x\to x_0} f'(x)$ 存在 $\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f'(x)$

放宽：

$f(x)$ 在 x_0 处连续



$\exists f'(x_0)$ ： x_0 处切线斜率存在

$\exists \lim_{x\to x_0} f'(x)$ ： x_0 附近切线存在且趋向同一个极限位置（$f'(x)$）

证明： $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f'(x)$ L'Hospital 法则

② $f'(x_0)$ 存在，$x=x_0$ 一定不是 $f'(x)$ 的第一类间断点/无穷间断点

可去：左右极限存在但不等于导数值

跳跃：左右极限不等.

无穷：附近点切线斜率 ∞，这一点切线斜率有限？

可能存在振荡间断点 ：例 1

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 任意邻域内有无数次 -1 到 1 的振荡

也可能点点相依相偎.（无限次振荡使极限不存在不得不称为间断）

例题 3.1.11. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

试讨论 $f(x)$ 的连续性, 可导性及导数的连续性.

解: 当 $\alpha>0$ 时, $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=0$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

当 $\alpha\le0$ 时, 取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^{\alpha}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 不存在

故 $\alpha>0$ 时, $f(x)$ 连续

x_n 取法: 保证 x_n 是无穷小量. 充分利用振荡

当 $\alpha>0$ 时, $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$

当 $\alpha>1$ 时 $f'(0)=0$ 当 $0<\alpha\le1$ 时 $f'(0)$ 不存在

故 $\alpha>1$ 时, $f(x)$ 可导

$$f'(x)=\begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处为振荡间断点.

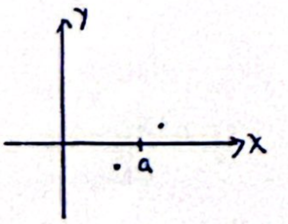
当 $\alpha>2$ 时, $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$ 当 $1<\alpha\le2$ 时 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 不存在

故 $\alpha>2$ 时, 导函数连续

13. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分必要条件是(   ).

(A) $f(a)=0, f'(a)=0$ (B) $f(a)=0, f'(a)\neq0$

(C) $f(a)\neq0, f'(a)=0$ (D) $f(a)\neq0, f'(a)\neq0$



解: $f(a)\neq0$ 时, $|f(x)|'=\sqrt{f^2(x)}'=\dfrac{2f(x)\cdot f'(x)}{2\sqrt{f^2(x)}}=\dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{|f(x)|}$

$|f(x)|'\big|_{x=a}=f'(a)\,/\,-f'(a)$ 此时 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导

故 $f(a)=0$

$|f(x)|'\big|_{x=a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)-f(a)|}{x-a}=\pm|f'(a)|$

故当 $f'(a)\neq0$ 时, 不可导. 选 B

根据上一题的经验，
不可导点只可能出现在绝对值里面的
函数的零点

例题 3 求函数 $f(x)=(x^2-5x+6)|x^3-3x^2+2x|$ 的不可导点.

解：考虑函数 $f(x)=g(x)|x-a|$ $g(x)$连续 何时在 $x=a$ 处可导

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)|x-a|}{x-a}=\pm g(a)$$

当且仅当 $g(a)=0$ 时 可导

$$f(x)=(x-2)(x-3)|x(x-1)(x-2)|$$

不可导点：$x=0$ 和 $x=1$

1. 设 a<b，并且设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是可微函数。如果对所有的 $x\in[a,b]$ 均有 $f'(x)>0$，证明 f 就是严格单调递增的。
再问，对于 $f:X\to\mathbb{R}$，$X\subseteq\mathbb{R}$，f 在 X 上可微，且对所有的 $x\in X$ 均有 $f'(x)>0$，问 f 是否是严格单调递增的？如果是，请证明；如果不是，请举出反例。

解：(1) $\forall x,y\in[a,b]$，当 $x\neq y$ 时 $(f(x)-f(y))(x-y)>0$

由 lagrange 定理：

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{f'(\xi)(x-y)}{x-y}=f'(\xi)>0$$ 得证

(2) 上述证明用了 lagrange 定理，要求闭区间连续，开区间可导

例：$-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单增 → 中学问题

例题 5 设 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-2}{x-a}=3$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}=$______.

解：$$\lim_{x\to a}f(x)-2=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-2}{x-a}\cdot x-a=0$$

又 $f(x)$ 连续，故 $f(a)=2$

因为 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-2}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=2$ 故 $f'(a)=2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[f(a+2h)+f(a-h)][f(a+2h)-f(a-h)]}{h}$$

$$=2f(a)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$$

$$=2f(a)[3f'(a)]=2\times2\times3\times3=36$$

例题 6 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$，则下列正确的是（　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=3$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=6$　　(C) $f''(0)=0$　　(D) $f'''(0)=6$

解：A、B无法推出，D题中没提到 $x=0$ 邻域内二阶可导

现证明 C 的正确性

$f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导. $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\cdot x^3 = 0 \qquad 故\ f(0)=0$$

$$而\ f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\cdot x^2 = 0$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}\ 存在$$

$$所以\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}\cdot x = 0$$

故 $f''(0)=0$

复习 L'Hospital 法则.

① $x\to a/\infty$ 时，均 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

② 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 内 $f'(x)\exists$，$F'(x)\exists$ 且 $F'(x)\neq 0$

③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为无穷大

洛之后存在 $\Rightarrow$ 洛之前存在

$\Downarrow$

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$$

例题 7 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\Delta f(1)$ 是 $f(x)$ 在增量为 Δx 时的函数值增量，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(1)-\mathrm{d}f(1)}{\Delta x}=$（　　）.

(A) $f'(1)$　　(B) 1　　(C) ∞　　(D) 0

解：

$$\Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1)$$

$$\mathrm{d}f(1) = f'(1)\,\mathrm{d}x = f'(1)\,\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(1)-\mathrm{d}f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)-f'(1)\Delta x}{\Delta x} = f'(1)-f'(1) = 0$$

$$\begin{cases} \Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \\ \mathrm{d}y = A\Delta x = f'(x_0)\,\Delta x \\ \mathrm{d}x = \Delta x \end{cases}$$